Analysis (Funktionen)

Extremstellen, Wendepunkte, Kurvendiskussion

Extremstellen, Wendetangente

Gleichung modellieren, Polynomfunktion

Verlauf eines Schaubilds untersuchen

Transformation von Funktionen

Stammfunktion, Flächeninhaltsfunktion, Fläche zwischenzwei Schaubildern

Trigonometrische Funktionen

Von der Sekante zur Tangente

Von der Sekante zur Tangente Herleitung der Ableitungsfunktion am Beispiel einer Parabel

Eine Gerade die durch zwei Punkte einer Funktion verläuft heißt Sekante. Seien $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ diese Punkte, dann berechnet man die Steigung dieser Geraden mit Hilfe der

Zwei-Punkte-Form (ZPF) nach der Formel

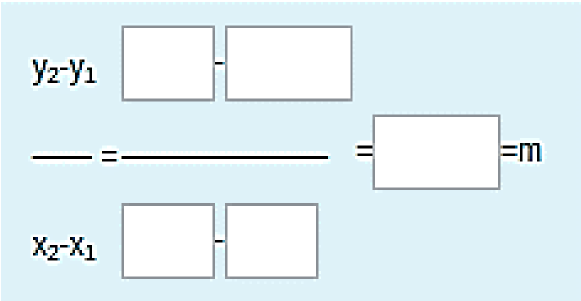
$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = m$$

Im Beispiel sei die Funktion gegeben durch $f(x)=\frac{1}{2}x^2$. Die Punkte $P_1(1|0{,}5)$ und $P_2(2|2)$. Um von P_1 zu P_2 zu gelangen, benötigt man auf der x-Achse einen Schritt der **Schrittweite 1**.

Wir werden nun diese Schrittweite systematisch verkleinern. Wenn der Abstand beider Punkte gegen Null geht, wird aus der Sekante eine Tangente.

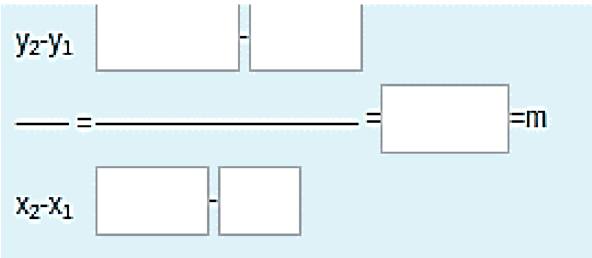
Schrittweite 1:

$P_1(1|0{,}5)$, $P_2(2|2)$ ergibt die Sekantensteigung:



Schrittweite 0,5:

$P_1(1|0{,}5)$, $P_2(1{,}5|\quad)$ ergibt die Sekantensteigung:



Schrittweite 0,25:

$P_1(1|0{,}5)$, $P_2(1{,}25|\quad)$ ergibt die Sekantensteigung:

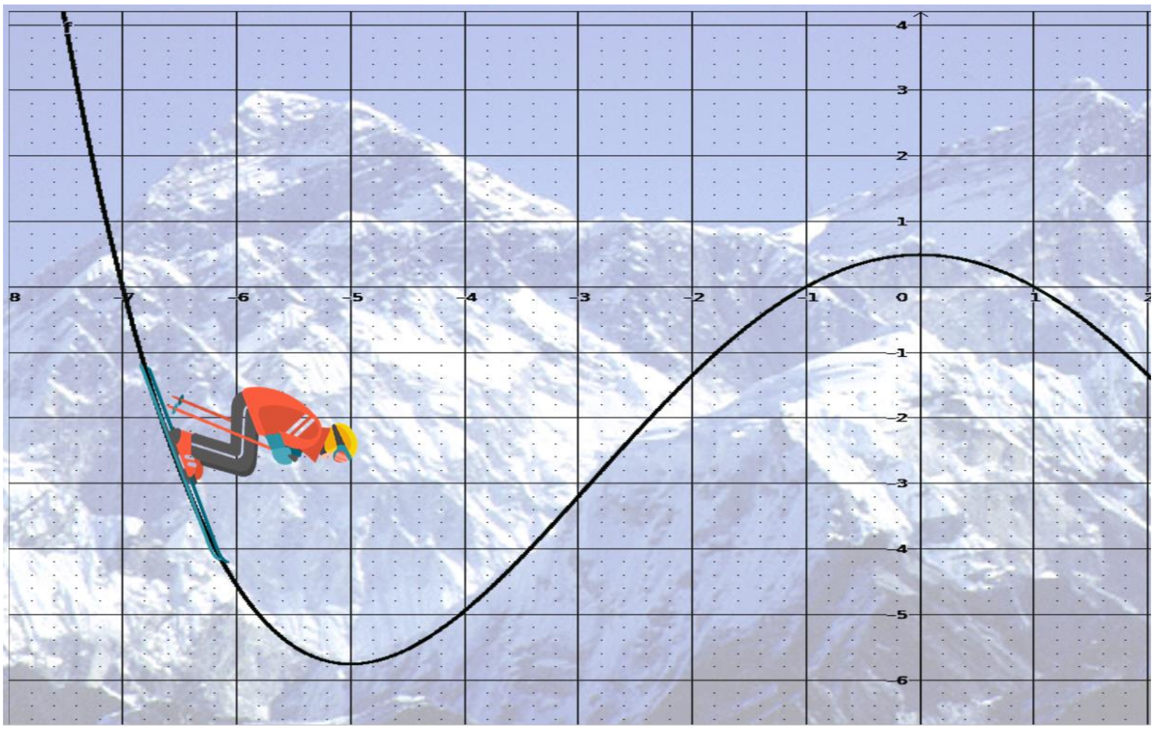
$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{\square - \square}{\square - \square} = \square = m$$

Schrittweite h:

$P_1(1|0,5)$, $P_2(1+h| \quad (1+ \quad)^2)$ ergibt die Sekantensteigung:

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} =$$

Von der Funktion zur Ableitungsfunktion



Wähle aus den Begriffen: Definitionsmenge, Wertemenge, Schaubild, Steigung, Differenzenquotienten, Differenzieren

Eine Funktion f ordnet jedem x-Wert aus der ……………. genau einen y-

Wert aus der ……………. zu. Das kann man durch ein ……………. visualisieren. Wenn man dieses Schaubild anschaut, könnte

interessieren, wie steil die …………….

an jeder Stelle ist, also die Tangentensteigung. Dabei benutzt man gerne das Bild eines Skifahrers. Der Ski symbolisiert dabei die Tangente an das Schaubild, während alle Stellen x aus der Definitionsmenge "durchfahren" werden.

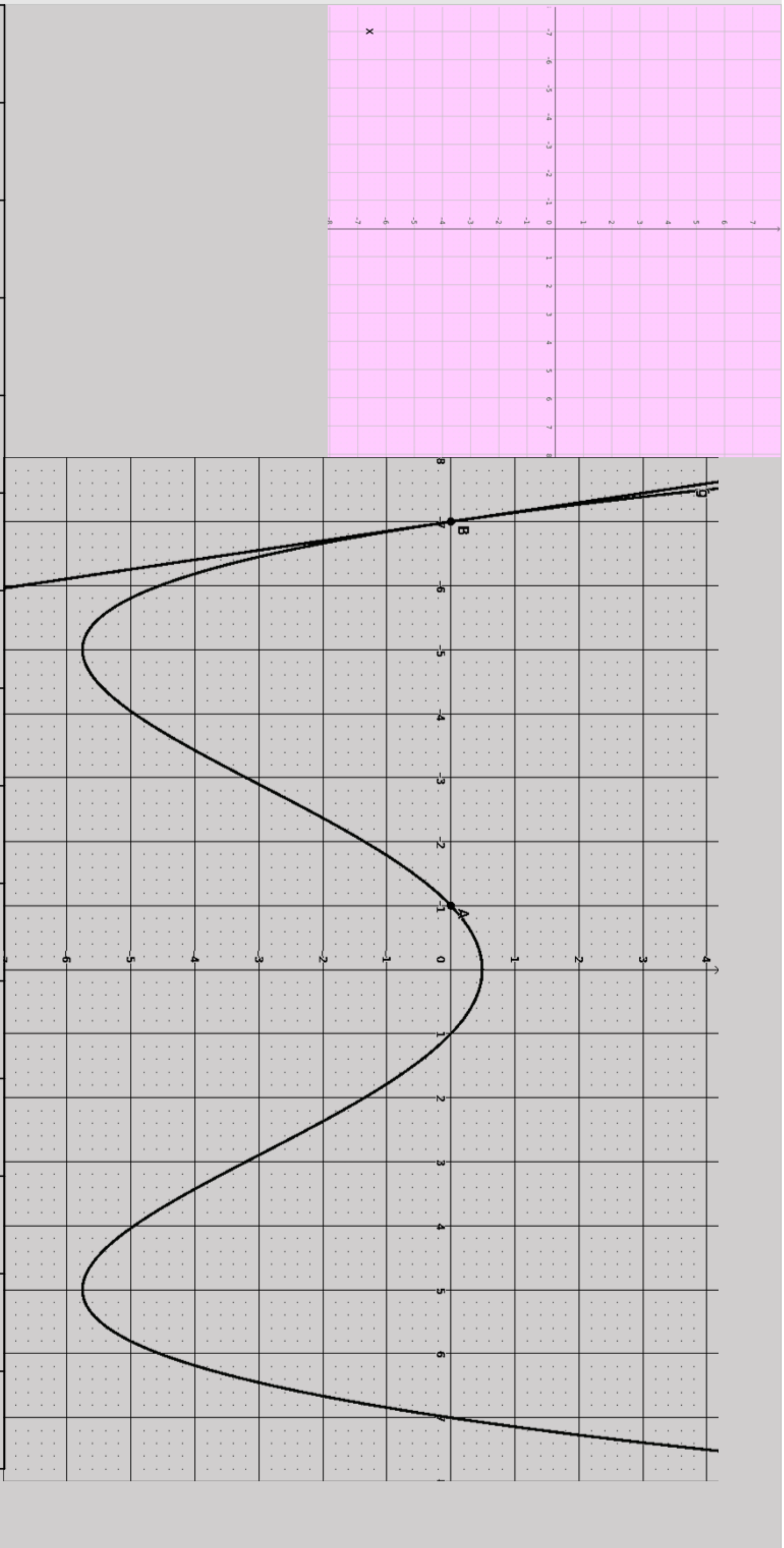
Geometrisch könnte man nun mit das Steigungsdreieck einzeichnen und mit dem Differenzenquotienten die Steigung (den Tangens des Winkels gegenüber der Horizontalen) bestimmen. Man nenn das manuelles ……………. (manuelles Ableiten).

Will man nun die ……………. über den Verlauf das gesamten „Skifahrerweges" anschauen und notieren, dann kann man das wieder über eine Funktion tun:

Die Funktion f'(x) ordnet jeder reellen Zahl auf der x-Achse eine reelle Zahl und auch eine Information über K_f zu. Zu jeder x-Koordinate von f' ist die y-Koordinate von f' die Steigung der Tangente an der Stelle x an

das Schaubild von K_f .

-7	**-6**	**-5**	**-4**	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
-6,72														



Idee der Ableitungsfunktion

Gegeben sei f(x) = $\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x$

1) Zeichnen Sie das Schaubild in ein rechtwinkliges KS.

Hinweis: Wertetabelle

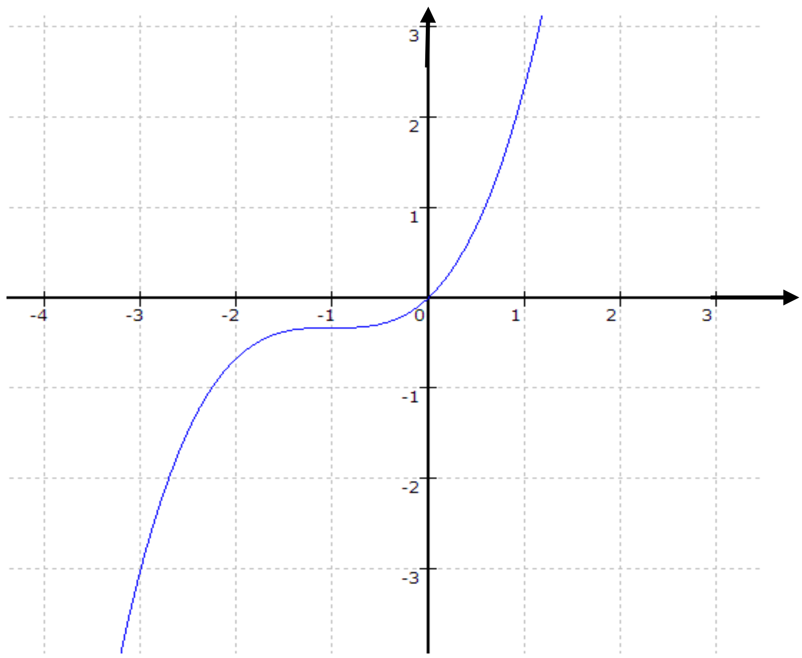
x	-2	-1	0	0,5	1
f(x) = $\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x$	-0,6	-0,3	0	0,8	2,3

2) Bestimmen Sie die Tangentensteigung an der Stelle x_0.

3) Bestimmen Sie die Tangentensteigung an der Stelle -1.

4) Bestimmen Sie die Tangentensteigung an der Stelle 0.

5) Bestimmen Sie die Tangentensteigung an der Stelle 1.



6) Zeichnen Sie die Tangenten an das Schaubild.

Definition der Ableitungsfunktion: Die Funktion die jedem x-Wert die Tangentensteigung der Tangente an der Stelle x an das Schaubild von f(x) zuordnet, nennt man die **Ableitungsfunktion** f′(x).

Ableitung, Extremstellen

Zeichne das Schaubild der Funktion $f(x) = x^3-4x^2+4x = x^2(x-2)$, achte dabei bitte die exakten Werte an den Nullstellen. Nimm die Wertetabelle zu Hilfe.

x	0,5	1	1,5	2
f(x)				

An welchen Stellen besitzt das Schaubild waagrechte Tangenten?

Lösung:

An den Stellen x_1 =……. …und x_2 =………. (von links nach rechts)

Berechne die Ableitung von f
Berechne die Nullstellen von f'(x).

Vervollständige den Merksatz:

Merke: Stellen mit ……….Tangente sind die ……….der Ableitung. Das Schaubild von f(x) kann dort einen Hochpunkt oder einen Tiefpunkt haben.

Vervollständige den Merksatz:

Merke: Für 0,67<x<2 ist die Funktion f(x)……….. Dort ist die Ableitungsfunktion f'(x) ………. als Null..

Vervollständige den Merksatz:

Merke: Für 0,67<x und für x>2 ist die Funktion f(x) ……….. Dort ist die Ableitungsfunktion f'(x) ………..

Ableitungsregeln anwenden (J1)

Potenzregel und Summenregel

a)	$f(x) = a \cdot x^n$
b)	$f(x) = 5x^3 + \frac{1}{8}x^4 - 2x$
c)	$f(x) = x^{99} - \frac{1}{\sqrt{2}}x^2 + 33$
d)	$f(x) = \frac{1}{6}x^{18} - \frac{1}{9}x^9 + 5x^2$
e)	$f(x) = \frac{1}{5}x^{25} + \frac{1}{7}x^7 + 7$
f)	$f(x) = 5x^3 + 3x^3 - \frac{1}{11}x^{121}$
g)	$f(x) = x^{-3} - x^{-5} + \frac{1}{3}x^{-9}$
h)	$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 17$
i)	$f(x) = -\frac{1}{6}x^{-6} + \frac{1}{x^8}$
j)	$f(x) = \frac{5}{x^5} + \frac{1}{x}$
k)	$f(x) = -\frac{1}{5}x^{-5} + x^{-5} + \frac{1}{x}3 - \frac{1}{x}$
l)	$f(x) = \sqrt{x} + 3x$
m)	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^3} - x^{-5}$
n)	$f(x) = x^{\frac{5}{3}} - \sqrt[3]{x} + 3x^{\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{x}$
o)	$f(x) = \sqrt{x} - \left(\sqrt{x}\right)^5 + \frac{1}{\sqrt{x}}$
p)	$f(x) = \sqrt[7]{x} - \frac{1}{x^5} + 121$
q)	$f(x) = 2x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \sqrt[11]{x} - 9$
r)	$f(x) = -3\sqrt[3]{x} + 33x^{\frac{1}{9}}$

s)	$f(x) = 2x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[7]{x}$
t)	$f(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 15$

Sin(x) und cos (x) und e^x ableiten

a)	$f(x) = \sin(x) + \cos(x) + e^x$
b)	$f(x) = -e^x - \sin(x)$
c)	$f(x) = 3e^x - \cos(x)$
d)	$f(x) = -\sin(x) - \cos(x) - e^x$
e)	$f(x) = 15e^x + \frac{1}{x^2} + 19\cos(x)$

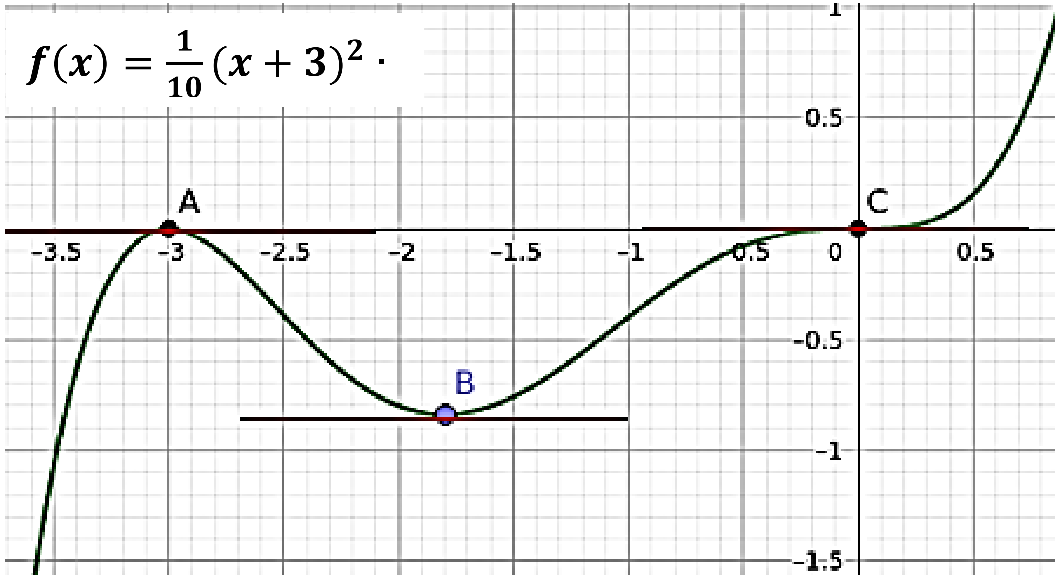
Produktregel

a)	$f(x) = (2x^2 - x) \cdot (x^5 + 1)$
b)	$f(x) = \left(1 - \frac{1}{3}x^3\right)\left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{9}x^9\right)$
c)	$f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$
d)	$f(x) = (2x + 4)(2x - 4)$
e)	$f(x) = \left(\frac{1}{5}x^{10} - x^3\right)\left(\frac{1}{5}x^{10} - x^3\right)$
f)	$f(x) = \sqrt[7]{x}(3x^3 - x^2)$
g)	$f(x) = x^{-1}(e^x + 7)$
h)	$f(x) = \frac{1}{x^2}\cos(x)$
i)	$f(x) = e^x\left(18x + \sqrt{2}\right)$
j)	$f(x) = (e^x - 1)\left(3e^x + cos(x)\right)$

Kettenregel

a)	$f(x) = e^{3x+7} - 1$
b)	$f(x) = cos\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)$
c)	$f(x) = \sqrt{(6x+9)}^2$
d)	$f(x) = \sin(3x) - cos\left(5x - \frac{1}{3}\right)$
e)	$f(x) = 5cos(2x - 9)$
f)	$f(x) = (3x^2 - 1)^5$
g)	$f(x) = \sin\left(\frac{1}{3}x - 7\right)$
h)	$f(x) = e^{\frac{1}{5}x-19}$
i)	$f(x) = \sin(3x - 5) + \cos(5x - 3)$
j)	$f(x) = -\sin(-x - 1) + \cos\left(\frac{1}{3}x^6\right) + 3e^{\frac{1}{3}x-1}$

[Bestimmung von Hoch- und Tiefpunkten (Extremstellen) mit Vorzeichenwechsel von f' (J1)]



Untersuchen Sie die Steigungen der Tangenten jeweils kurz vor und kurz nach den Punkten (A,B und C):

Stelle	Tangentensteigung vor der Stelle (<0 oder >0 ?)	Tangentensteigung vor der Stelle (<0 oder >0 ?)	Hochpunkt oder Tiefpunkt oder keine Extremstelle (Sattelpunkt)?
x=-3			
x=-1,8			
x=0			

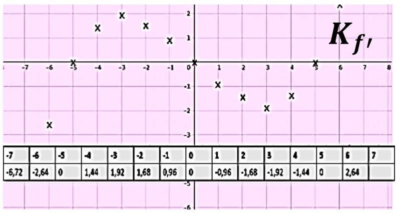
Formulieren Sie einen Merksatz:

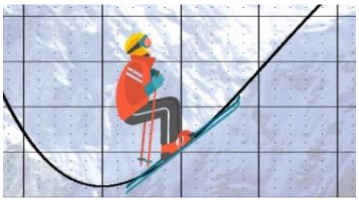
An der Stelle x_0 ist ein **Hochpunkt**, genau denn wenn……

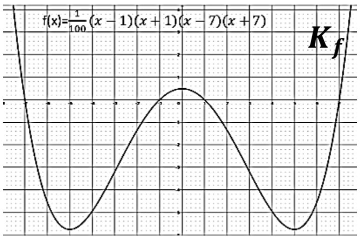
An der Stelle x_0 ist ein Tiefpunkt, genau denn wenn…….

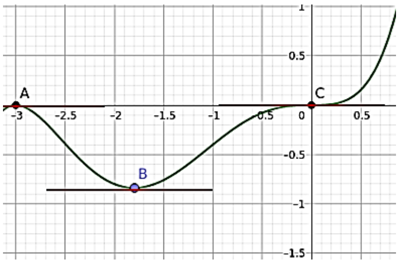
Monotoniebereiche und Extremstellen (J1)

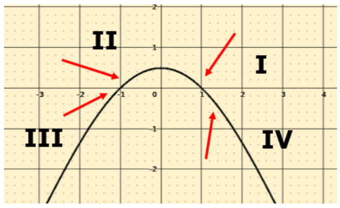
Vision oder Werkzeug oder genau hinschauen? ↓	Funktionen und Schaubilder modellieren in der Physik das Verhalten von Objekten in der Realität.	
	Im Matheunterricht aber sind Funktionen eine Abbildung (Zuordnung) von der Definitionsmenge (x-Achse) in die Wertemenge (y- Achse).	*Bild zum nebenstehenden Text* ↓
	Die Ableitungsfunktion f' von f ist auch eine Zuordnung. Sie ordnet jedem x-Wert die zugehörige Tangentensteigung an das Schaubild von f zu.	
	Die wichtige Information in Form von der "Tangentensteigung" von f' hilft uns, den Verlauf des Schaubilds K_f zu beschreiben.	
	An einem Hoch oder Tiefpunkt ist die Tangente immer waagerecht, aber nicht bei jeder waagerechten Tangente ist ein Hoch- oder Tiefpunkt.	
	Eine einfache Nullstelle (egal ob von f oder f') bedeutet immer auch, dass die Funktionswerte vor der Nullstelle ein anderes Vorzeichen haben als nach der Nullstelle. Es gibt einen Vorzeichenwechsel.	
	Bei der Kurvendiskussion muss man …	
	… Satz vom Nullprodukt kennen	
	…Quadratische Gleichung lösen können (pq- Formel)	
	…ableiten können (Ableitungsregeln)	
	…die Begriffe Nullstelle, Hochpunkt und Tiefpunkt kennen	











Ein Produkt ist genau dann Null,

wenn einer seiner Faktoren Null ist

$x^4e^x + 5x^3e^x = 0$

$x^3 \cdot e^x \cdot (x+5) = 0$

$x_1 = 0$ oder x= -5

$x^2+2x-3=0$

$x_{1,2}=-1\pm\sqrt{1+3}$

$x_{1,2}=-1\pm\sqrt{4}$

$x_{1,2}=-1\pm 2$

$x_1=1$ $x_2=-3$

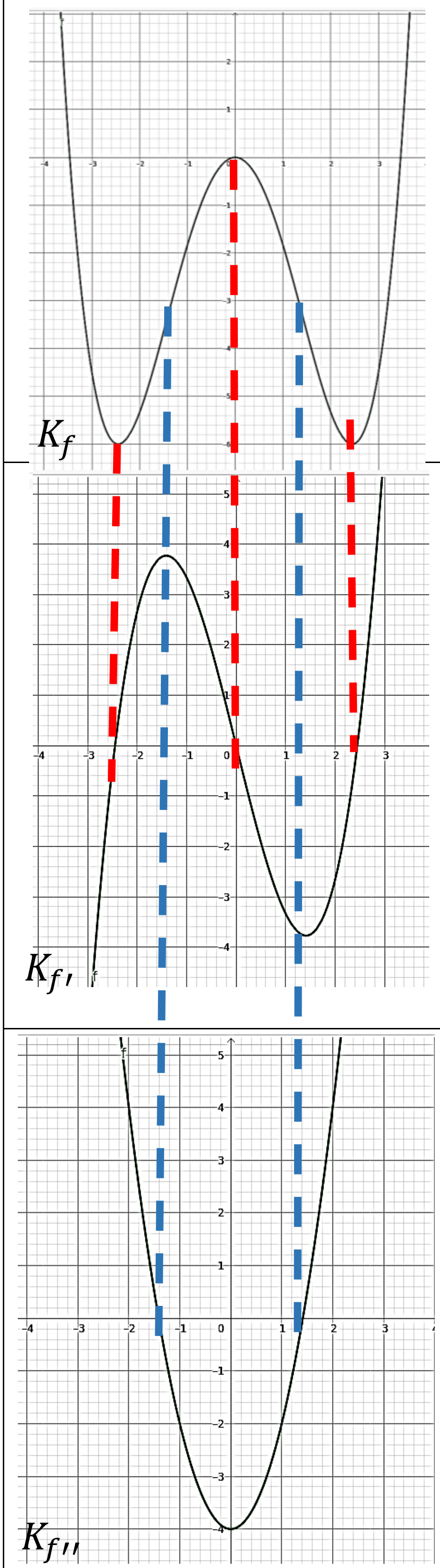
$f(x) = x^3 - \sin(x)$

$f'(x)=3x^2 - \cos(x)$

$f``(x)= 6x + \sin(x)$

Extremstellen, Wendepunkte, Kurvendiskussion

Übersicht über die Kriterien zur Kurvendiskussion (J1)

f(x)= $\frac{1}{6}x^4 - 2x^2$	Hoch- und Tiefpunkte	Wendepunkte bzw. Krümmungsverhalten
	Tangente an der Stelle des Extrempunktes ist ……….. Tangenten ……….. vor der Stelle $x_0$und ……….. danach => Hochpunkt Tangenten fallen vor der Stelle x_0 und steigen danach => ………..	Tangentensteigungen werden kleiner ⇒ ……….. Tangentensteigungen werden ……….. ⇒ Linkskurve Tangentensteigungen werden größer bis zur Stelle x_0 und danach wieder kleiner ⇒ Wendepunkt an der Stelle x_0 Tangentensteigungen werden kleiner bis zur Stelle x_0 und danach wieder größer ⇒ Wendepunkt an der Stelle x_0
	a) VZW von f' an der Stelle x_0 b) f'(x_0)=0 Bemerkungen: 1) VZW von f' ⇔ Extremstelle (mit f'(x) = 0 wissen wir, wo Kandidaten für Extremstellen sind) 2) a) ⇒ Die Tangente an $K_{f'}$ steigt (bei VZW von … nach …) und fällt (bei VZW von … nach …)	f'(x) streng monoton fallend ⇒ ………..f'(x) streng monoton ………..⇒ Linkskurve Hochpunkt oder Tiefpunkt von $K_{f'}$ an der Stelle x_0 ⇔ ……….. an der Stelle x_0
	f''$(x_0) > 0$ und f'(x_0) = 0 ⇔ ……….. an der Stelle x_0 f''$(x_0) < 0$ und f'(x_0) = 0 ⇔ Hochpunkt an der Stelle x_0	f''$(x_0) = 0$ und f'''$(x_0) \neq 0$ ⇔ ……….. an der Stelle x_0

*Anmerkung: kleiner und größer meint hier den Betrag der Steigung , nicht ob sie negativ oder positiv ist.

Ableitung und Extremstellen

1)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$.

Fülle die Wertetabelle aus und zeichne K_f in ein rechtwinkliges Koordinatensystem.

x	-2,5	-1	0	1	2	2,5
f(x)						

2) Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$..Begründe rechnerisch, ob f(x) einen Hoch- oder Tiefpunkt besitzt.

3)

Gegeben sei die Funktion$(x) = x^4 - 8x^2 + 16$. Bestimme f'''(x).

4)

Gegeben sei die Funktion$(x) = x^4 - 8x^2 + 16$. Bestimme die Nullstellen von f(x).

Wendepunkt, Krümmungsverhalten

Gegeben sei die Funktion

$f(x) = x^3-3x^2+2$

Berechne $f'(x)$ und $f''(x)$

Zeichne die Schaubilder von f und f′ und f′′ in verschiedene Koordinatensysteme untereinander in Dein Heft.

Betrachte die Lösung zu Frage 2 und vervollständige die Tabelle. (Aber: nicht alle Fragen lassen sich allein durch Betrachten dieser Schaubilder beantworten)

Tangentensteigung	**Schaubild**
bleibt ständig positiv	
bleibt ständig negativ	
$f'(x) = 0$ und f′ hat VZW(=Vorzeichenwechsel) von – nach +	
$f'(x) = 0$ und f′ hat VZW(=Vorzeichenwechsel) von + nach -	
f′ erreicht ein Minimum, d.h. nimmt ab und dann wieder zu	
f′ erreicht ein Maximum, d.h. nimmt zu und dann wieder ab	

Wähle zwischen den Begriffen:

streng monoton wachsend

streng monoton fallend

wechselt von einer Rechts- zu einer Linkskurve

wechselt von einer Links-zur Rechtskurve

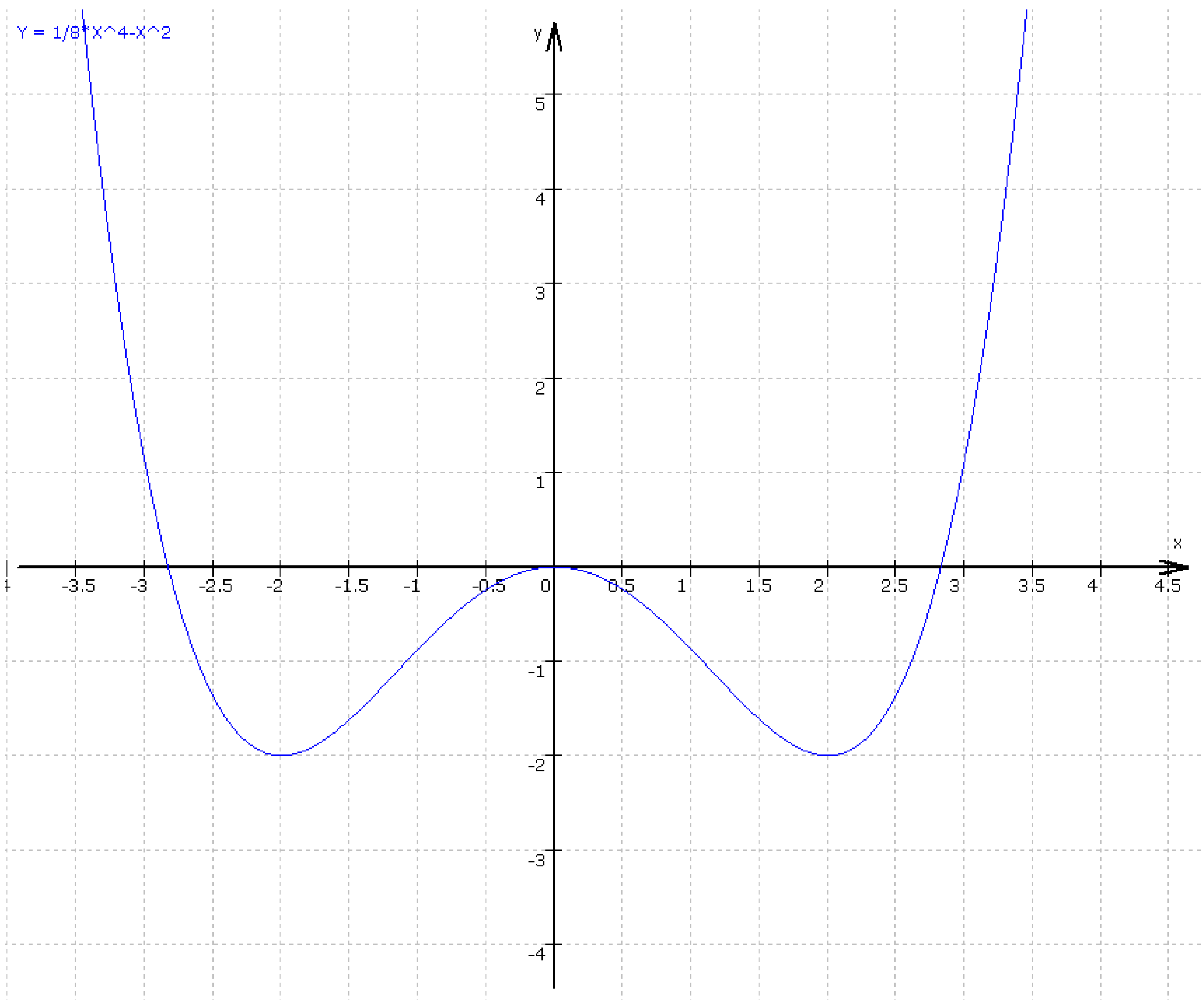
hat einen Hochpunkt

hat einen Tiefpunkt

Kurvendiskussion

Gegeben ist die Funktion f mit f(x) = $\frac{1}{8}x^4 - x^2$, x $\in$ IR.

Ihr Schaubild ist K_f.
Berechnen Sie die exakten Koordinaten der Schnittpunkte von K_f mit der x-Achse und die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte von K_f.
In welchem Intervall auf der positiven x-Achse ist K_f steng monoton fallend? (exakte Intervallgrenzen)
Zeichnen Sie K_f für x $\in$ [-3;3].



Wendepunkte

Berechnen Sie die Wendepunkte von K_f ,

wobei $f(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{8}{3}x^2$.

Wendepunkte

Extremstellen, Wendepunkt

Eine Funktion hat die Funktionsgleichung f(x)=$27 \cdot x \cdot (x-2)^2$

Berechnen Sie (exakt) für

1. die Achsenschnittpunkte
2. Die Koordinaten des Wendepunktes
3. Die Extremstellen

Umkehrfunktion

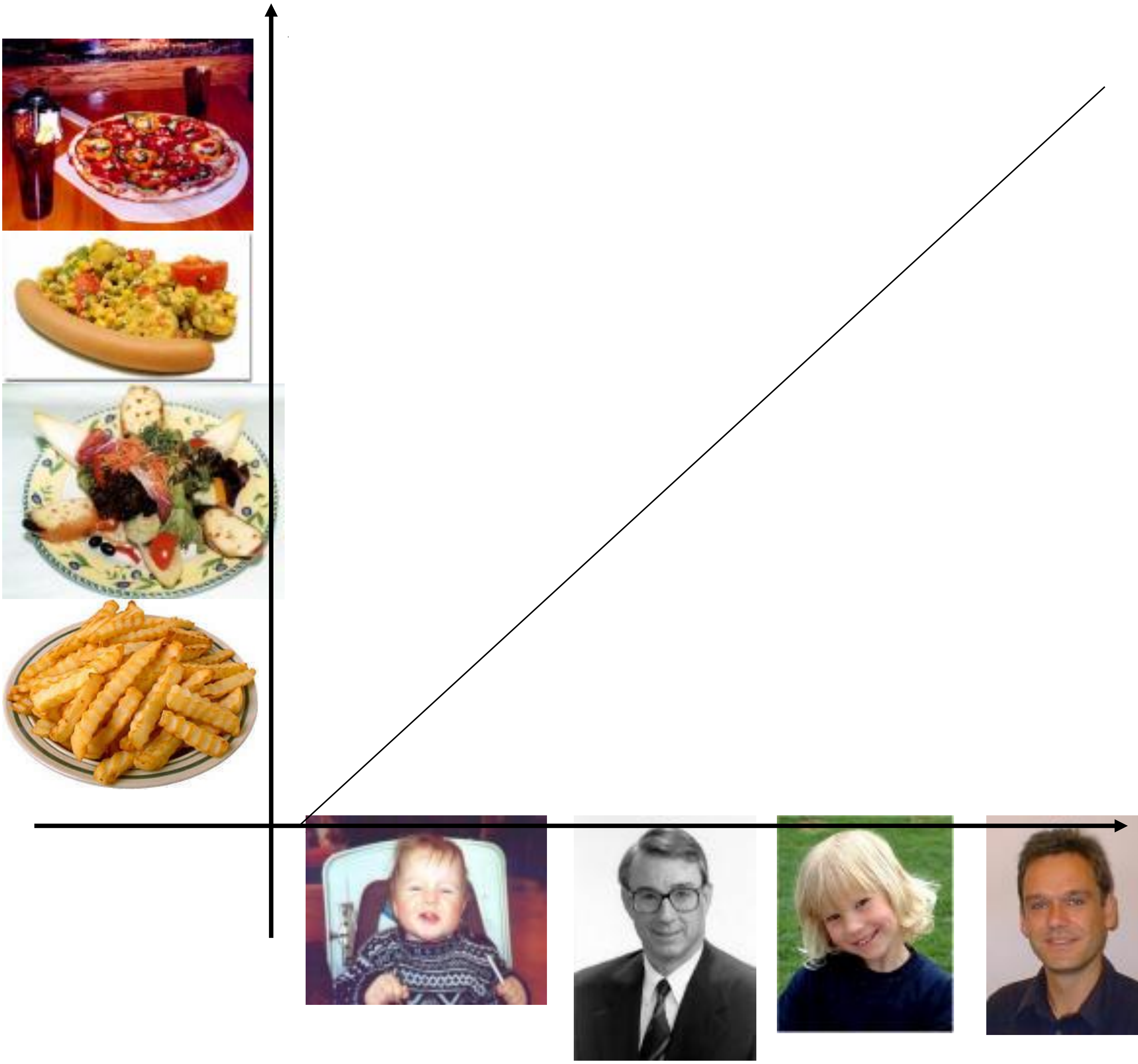
Eine **Funktion** f ist eine Zuordnung, die jedem Element x aus der Definitionsmenge **genau ein** Element y aus der Zielmenge zuordnet.

Die **Umkehrfunktion** f^{-1} (falls existent) dreht die Zuordnungsvorschrift von f um. Ihre Definitionsmenge ist die Wertemenge von f. Sie ordnet jedem Element aus ihrer Definitionsmenge sein Urbild unter f zu.

Der **Graph von** $\mathbf{f^{-1}}$ ist der Graph von f, gespiegelt an der ersten Winkelhalbierenden.

Die **Funktionsgleichung von** $\mathbf{f^{-1}}$ erhält man durch Auflösen der Funktionsgleichung von f und anschließendes Vertauschen der Variablen x und y.

Eine Funktion f besitzt genau dann eine Umkehrfunktion, wenn sie allen Elementen aus ihrer Definitionsmenge **verschiedene** Elemente aus der Zielmenge zuordnet. Man nennt f dann eine eineindeutige Zuordnung.



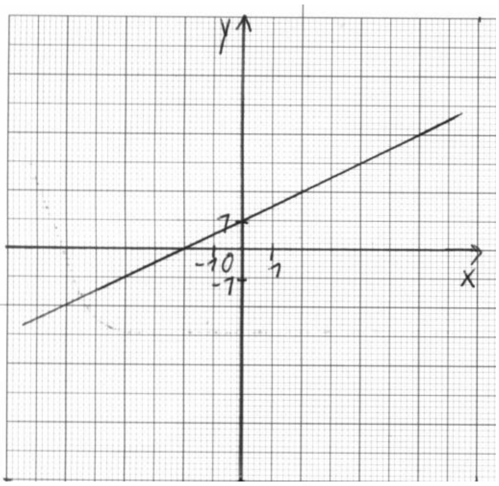
Die Tabelle enthält in der linken Spalte Funktionsgleichungen und in der rechten Spalte die zu deren Umkehrfunktionen gehörigen Gleichungen. Markieren Sie durch Nummerieren welche „Paare" zusammengehören.

(Nehmen Sie gegebenenfalls Ihren GTR zu Hilfe)

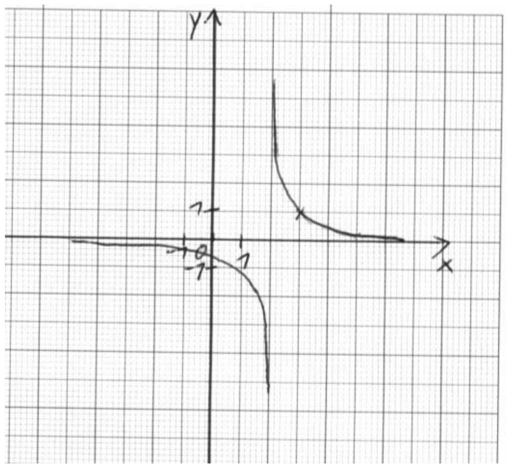
y = $\frac{1}{2}$x + 1		y = $\frac{1}{x-2}$	
y = $\frac{1}{x}$ + 2		y = ln x für x > 0	
y = e^x		y = 2x - 2	
y = x^3		y = $\sqrt[3]{x}$ für x > 0 y = -$\sqrt[3]{-x}$ für x < 0	

Welche Funktionen sind Umkehrfunktionen zueinander ?

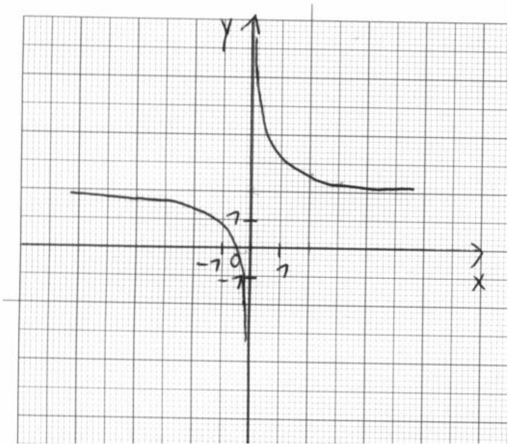
1



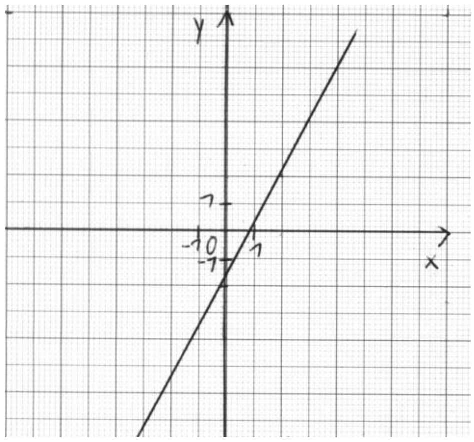
2



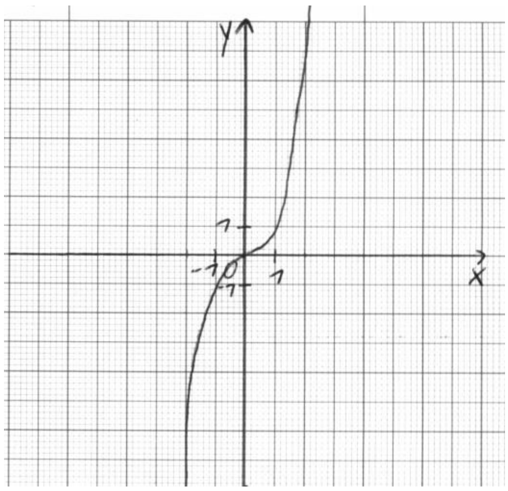
3



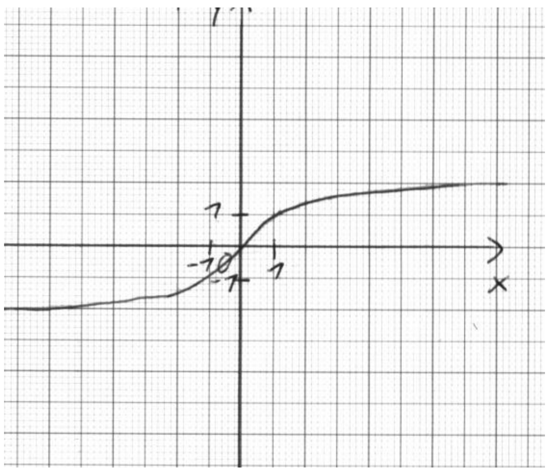
4



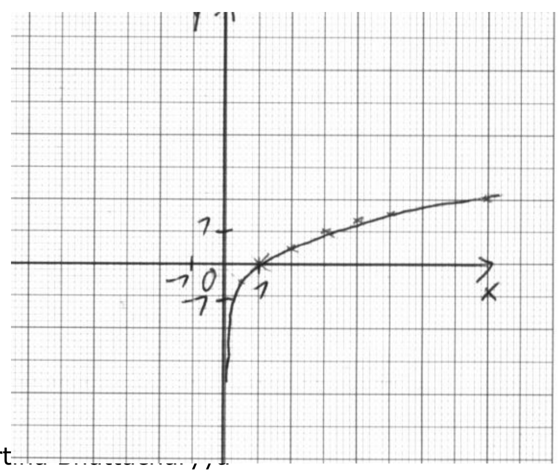
5



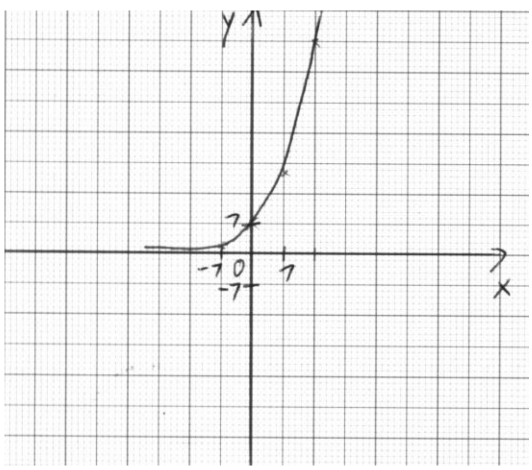
6



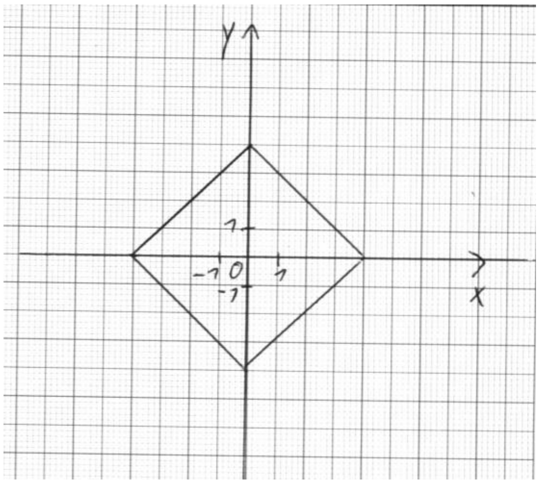
7

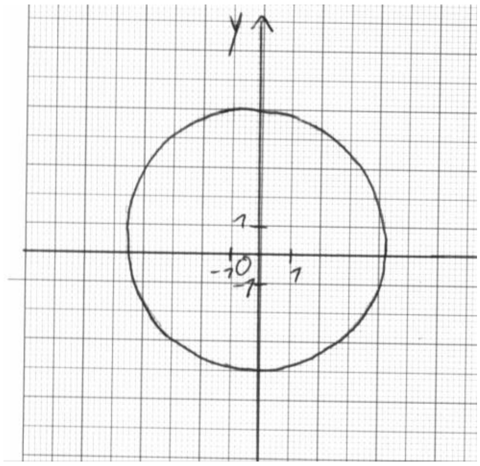


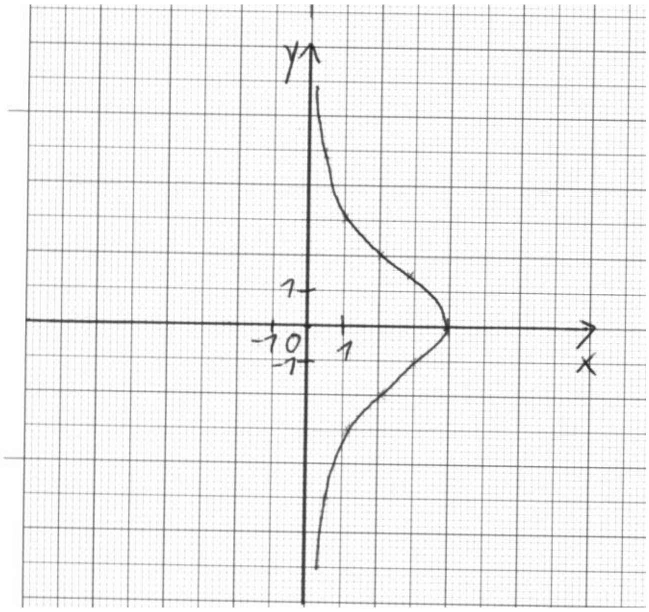
8

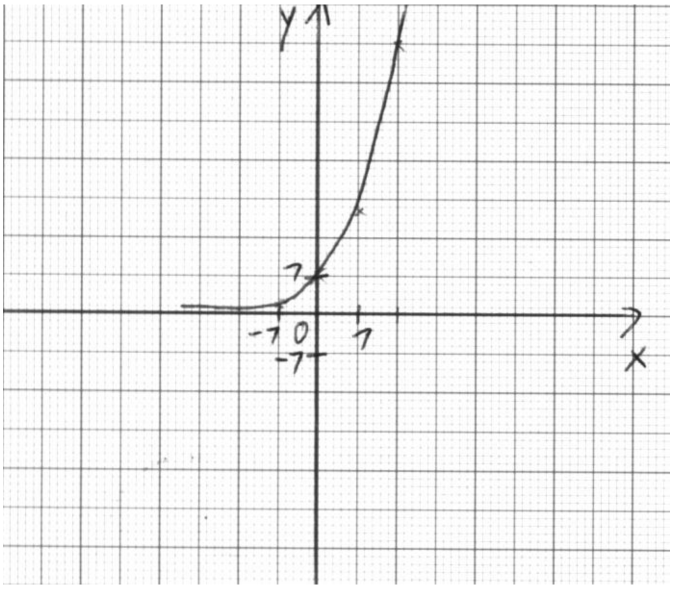


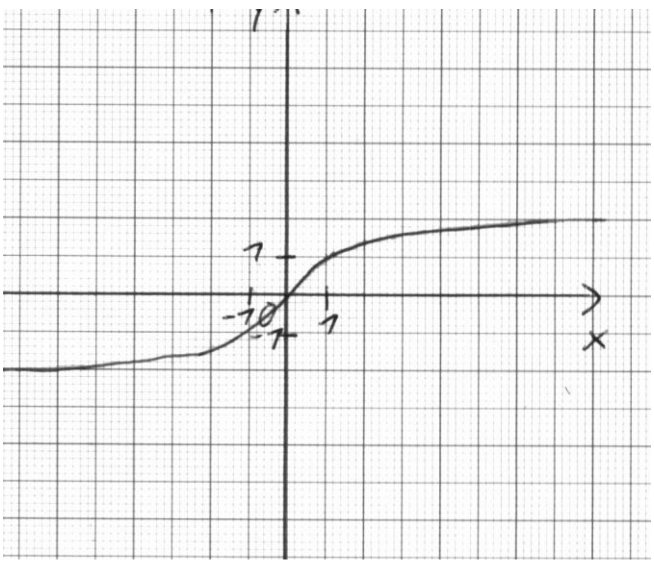
Entscheiden Sie, welche Schaubilder zu Funktionen gehören

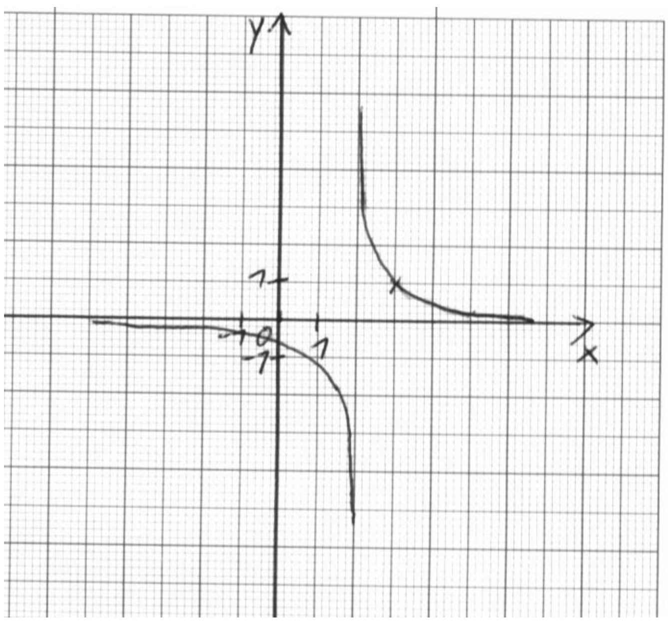












Arbeitsblatt

Die Umkehrfunktion

(Füllen Sie die Lücken mit den unten angegebenen Satzbausteinen)

1. Eine **Funktion** f ist eine Zuordnung, die jedem Element x aus der Definitionsmenge ………………………………………….. zuordnet.

2. Die **Umkehrfunktion** f^{-1} (falls existent) dreht die Zuordnungsvorschrift von f um. …………………………………... Sie ordnet jedem Element aus ihrer Definitionsmenge sein Urbild unter f zu.

3. Der **Graph von** $\mathbf{f^{-1}}$ ist ….………….……………………………………..
   …………………………………………….

4. Die **Funktionsgleichung von** $\mathbf{f^{-1}}$ erhält man …………………………….

   ………………………….

5. Eine Funktion f besitzt genau dann eine Umkehrfunktion, wenn sie allen Elementen aus ihrer Definitionsmenge **verschiedene** Elemente aus der Zielmenge zuordnet. Man nennt f dann eine eineindeutige Zuordnung.

- der Graph von f, gespiegelt an der ersten Winkelhalbierenden.
- **genau ein** Element y aus der Zielmenge
- durch Auflösen der Funktionsgleichung von f und anschließendes Vertauschen der Variablen x und y
- Ihre Definitionsmenge ist die Wertemenge von f

Extremstellen, Wendetangente

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4$.

1) Bestimme rechnerisch den Tiefpunkt.
2) Besitzt die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4$ einen Wendepunkt? Berechne gegebenenfalls seine Koordinaten.
3) Gegeben ist K_f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4$..

   Stelle die Funktionsgleichung der Wendetangente (d.h. die Gleichung der Tangente an K_f, die durch den Wendepunkt geht) auf.

4) Gegeben ist K_f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4$.

   Die Wendetangente von K_f schließt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck ein. Berechne seinen Flächeninhalt.

5) Gegeben ist K_f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4$.

   Die Funktionsgleichung von f lässt sich auch in der Form f(x)=a(x-b)(x-c)² schreiben. Bestimme a, b und c.

6) Gegeben ist K_f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4$.

   Bestimme die Gleichung der Normalen (Gerade die senkrecht auf der Tangente steht) im Punkt P(4|0).

Extremstellen, Wendetangente , 2

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 8x^2 + 20x - 16$.

1) Bestimme rechnerisch den Tiefpunkt.

2) Besitzt die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 8x^2 + 20x - 16$einen Wendepunkt? Berechne gegebenenfalls seine Koordinaten.

3) Gegeben ist K_f mit $f(x) = x^3 - 8x^2 + 20x - 16$..

   Stelle die Funktionsgleichung der Wendetangente (d.h. die Gleichung der Tangente an K_f, die durch den Wendepunkt geht) auf.

4) Gegeben ist K_f mit $f(x) = x^3 - 8x^2 + 20x - 16$.

   Die Wendetangente von K_f schließt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck ein. Berechne seinen Flächeninhalt.

5) Gegeben ist K_f mit $f(x) = x^3 - 8x^2 + 20x - 16$.

   Die Funktionsgleichung von f lässt sich auch in der Form f(x)=a(x-b)(x-c)² schreiben. Bestimme a, b und c.

6) Gegeben ist K_f mit $f(x) = x^3 - 8x^2 + 20x - 16$.

   Bestimme die Gleichung der Normalen (Gerade die senkrecht auf der Tangente steht) im Wendepunkt von K_f.

Extremstellen, Wendetangente, 3

Gegeben ist die Funktion $f(x)=5e^x(e^x-1)$.

1) Bestimme rechnerisch den Tiefpunkt.
2) Besitzt die Funktion f mit $f(x)=5e^x(e^x-1)$ einen Wendepunkt? Berechne gegebenenfalls seine Koordinaten.
3) Gegeben ist K_f mit $f(x)=5e^x\,(e^x-1)$.

   Stelle die Funktionsgleichung der Wendetangente (d.h. die Gleichung der Tangente an K_f, die durch den Wendepunkt geht) auf.

Textaufgaben zum Aufstellen von Funktionsgleichungen

Eine ganzrationale Funktion vierten Grades verläuft durch den Punkt P(-2|-4) und besitzt im Ursprung des Koordinatensystems ein relatives Minimum. Die Steigung ihrer Tangente an der Nullstelle x = - 1 beträgt 3.

Gib die zugehörige Funktionsgleichung an.

Lösungsweg:

$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

$f'(x)=$

$f(-2)=?$

Welche Textstelle informiert Dich darüber? ….

$f(0)=?$

Welche Textstelle informiert Dich darüber? ….

$f'(0)=?$

Welche Textstelle informiert Dich darüber?.....

$f'(-1)=?$

Welche Textstelle informiert Dich darüber?.....

f(-1)=?

Welche Textstelle informiert Dich darüber? …..

f(0)=0 => a=

Stelle nun mit diesem Wissen ein Gleichungssystem auf:

I f(-2)=…a-…b+…c-…d =…

II f'(0) = …a+…b+…c+…d=…

III f'(-1)=…a+…b-…c=…

IV f(-1)=…a-…b+…c=…

Die zu vereinfachende Matrix sieht jetzt so aus:

Mit Deinem Taschenrechner erhältst Du die Matrix:

Das bedeutet für die Variablen

a=… b=… c=…

Also lautet die gesuchte Funktionsgleichung.

f(x)=…..x^4 +…x^3+…

x^2

Textaufgabe. Finde den Term der Funktion

1)f ist eine Polynomfunktion 6. Grades. Das Schaubild von f ist symmetrisch zur y-Achse und schneidet die y-Achse im Punkt P(0|5). Gib eine möglichst einfache Form der Funktionsgleichung an.

Lösungsweg: "f ist eine Polynomfunktion 6. Grades"

$f(x)=ax^{?}+bx^{?}+cx^{?}+dx^{?} +ex^{?}+fx+g$

"symmetrisch zur y-Achse"

a	kreuze an
muss gleich Null sein	
muss ungleich Null sein	

b	kreuze an
muss gleich Null sein	
muss ungleich Null sein	

c	kreuze an
muss gleich Null sein	
muss ungleich Null sein	

d	kreuze an
muss gleich Null sein	
muss ungleich Null sein	

e	kreuze an
muss gleich Null sein	
muss ungleich Null sein	

f	kreuze an
muss gleich Null sein	
muss ungleich Null sein	

g	kreuze an
muss gleich Null sein	
muss ungleich Null sein	

Punkt P(0|5) liegt auf dem Schaubild f(...)= ...

f(0)= Also lautet die Funktionsgleichung f(x)=

2)Die Polynomfunktion g ist eine Funktion 3. Grades. Ihr Schaubild ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Gib eine möglichst einfache Form der Funktionsgleichung an.

Lösungsweg:

"g ist eine Polynomfunktion 3. Grades" $g(x)=ax^?+bx^?+cx+d$

"punktsymmetrisch zum Ursprung"

a	kreuze an
muss gleich Null sein	
muss ungleich Null sein	

b	kreuze an
muss gleich Null sein	
kann ungleich Null sein	

c	kreuze an
muss gleich Null sein	
Kann ungleich Null sein	

d	kreuze an
muss gleich Null sein	
kann ungleich Null sein	

e	kreuze an
muss gleich Null sein	
kann ungleich Null sein	

f	kreuze an
muss gleich Null sein	
kann ungleich Null sein	

g	kreuze an
muss gleich Null sein	
kann ungleich Null sein	

Also lautet die Funktionsgleichung.

3)Die Polynomfunktion h besitzt 4 Nullstellen: $N_1(1|0)$, $N_2(2|0)$, $N_3(3|0)$ und $N_4(4|0)$.

Stelle die zugehörige Funktionsgleichung auf.

Lösungsweg.

Es bietet sich zur Darstellung der Funktionsgleichung die ……… an.

h(x)=(x-…..)·(x-……)· (x-……)· (x-……)

4)Das Schaubild der Funktion k ist das Schaubild von g (siehe Frage 2), nur um 3 Einheiten nach oben verschoben.

Lösung: k(x)=…..

5)

m ist eine Polynomfunktion 2. Grades. Ihr Schaubild ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Gib eine möglichst einfache Form der Funktionsgleichung an.

Lösungsweg:

"m ist eine Polynomfunktion 2. Grades" $g(x)=ax^{?}+bx^{?}+c$

"symmetrisch zur y-Achse"

a	kreuze an
muss gleich Null sein	
kann ungleich Null sein	

b	kreuze an
muss gleich Null sein	
kann ungleich Null sein	

c	kreuze an
muss gleich Null sein	
kann ungleich Null sein	

Also lautet die Funktionsgleichung.

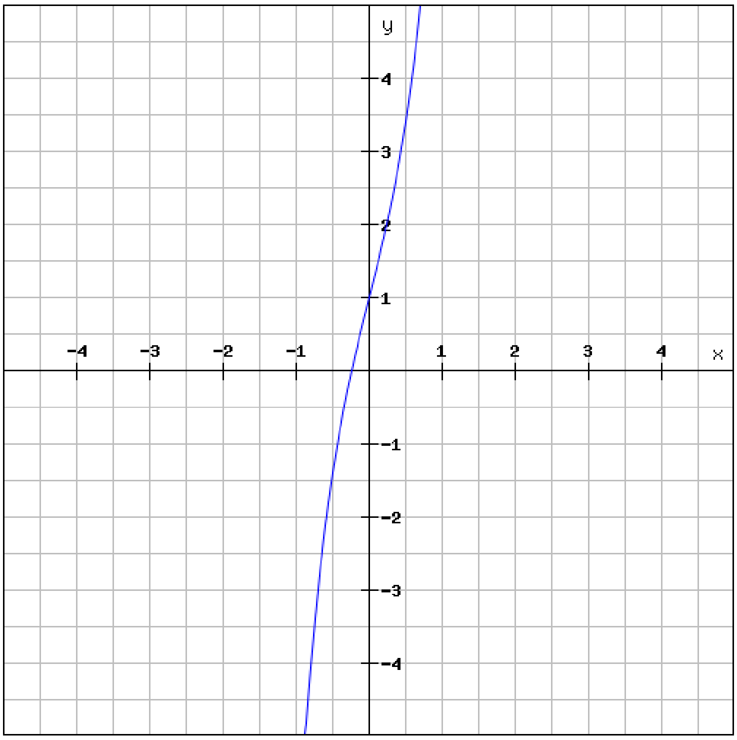
g(x)=

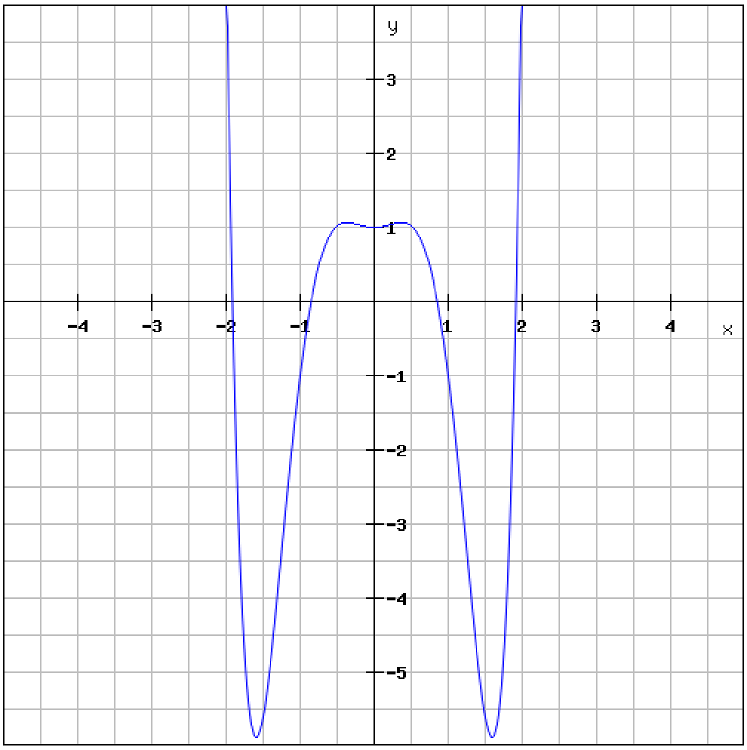
6)

Welche Funktionsgleichung passt zu welchem Schaubild?

$f(x)=x^5+3x^3+4x+1$

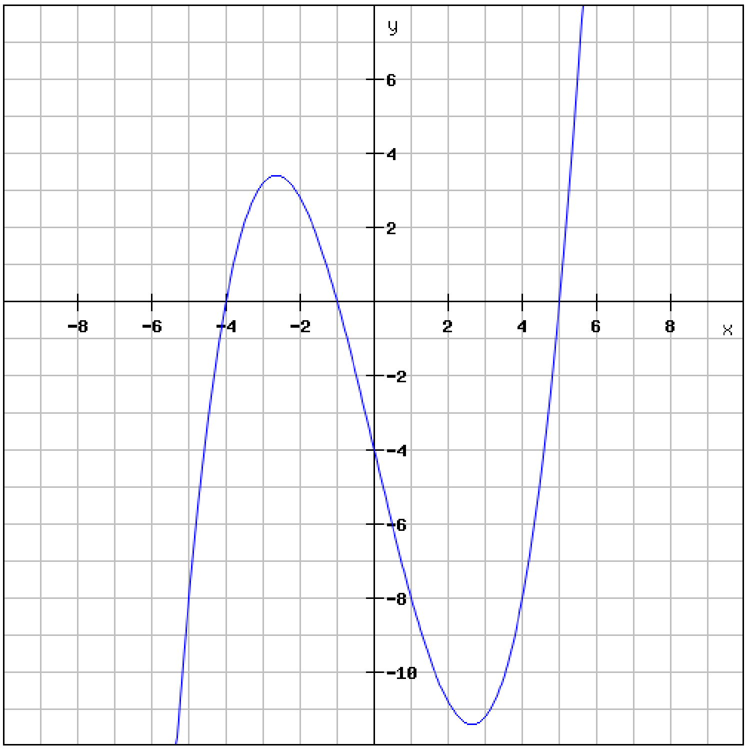
$f(x)=x^6-4x^4+x^2+1$



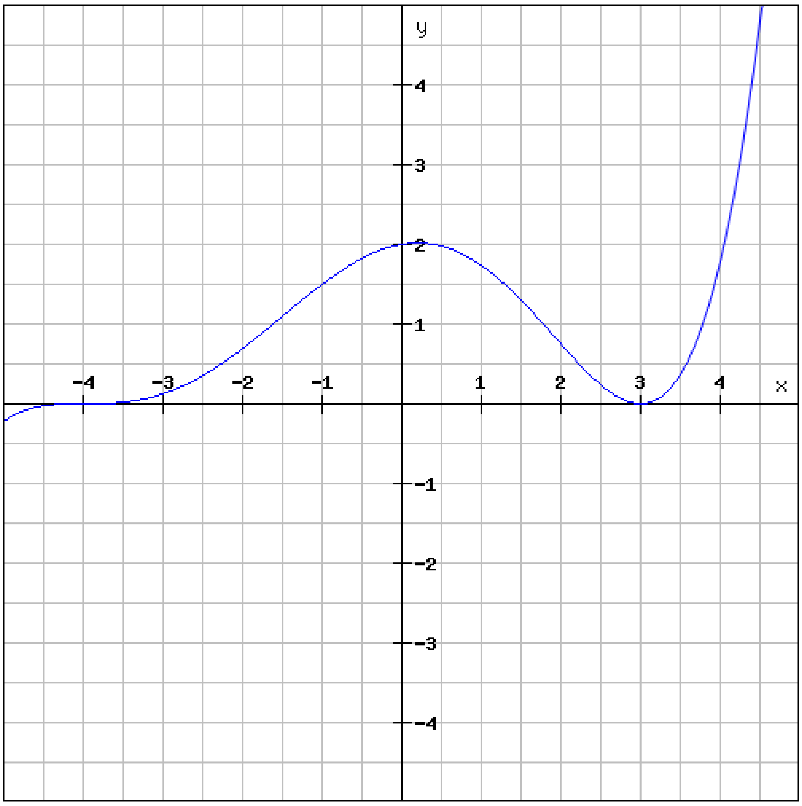


Finde den Funktionsterm zu gegebenem Schaubild

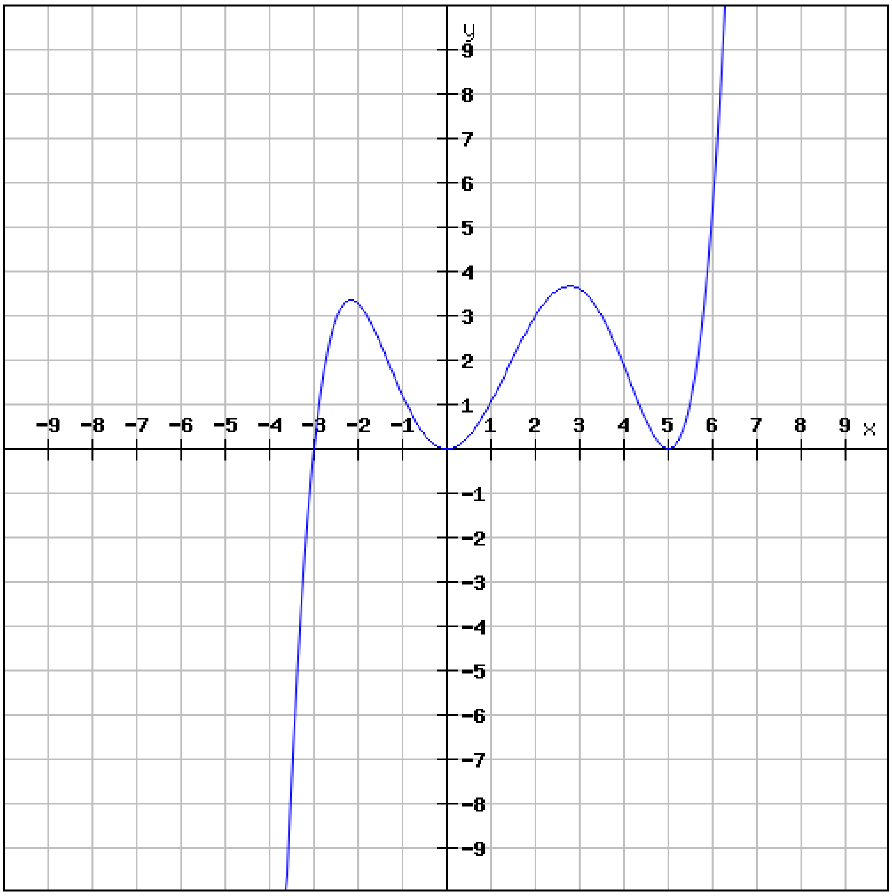
1) Gegeben ist das Schaubild. Stelle den zugehörigen Funktionsterm auf.



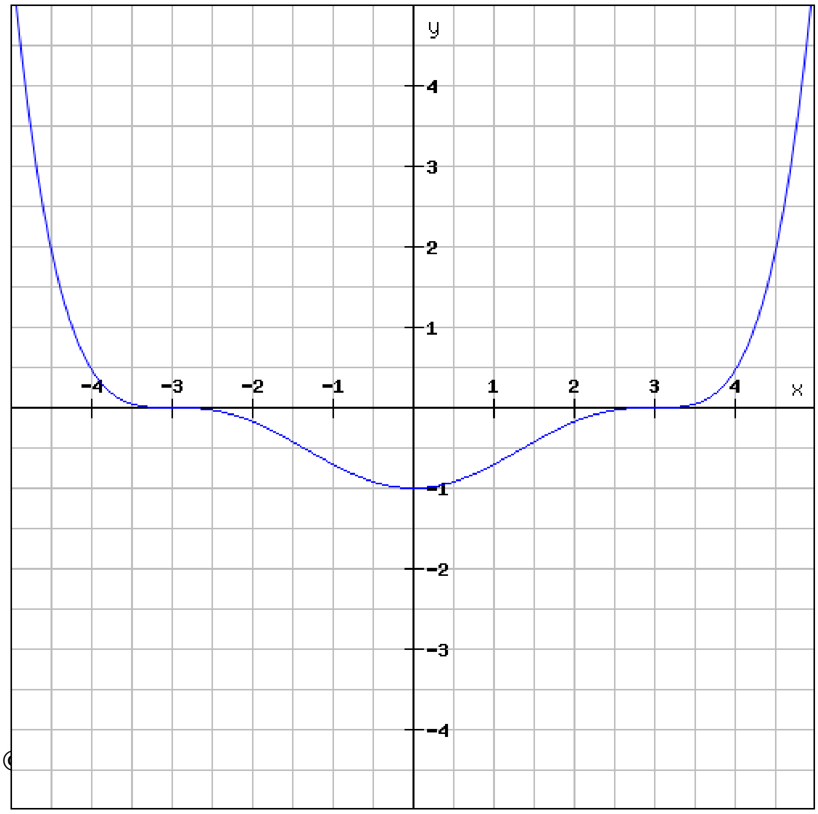
2) Gegeben ist das Schaubild. Stelle den zugehörigen Funktionsterm auf.



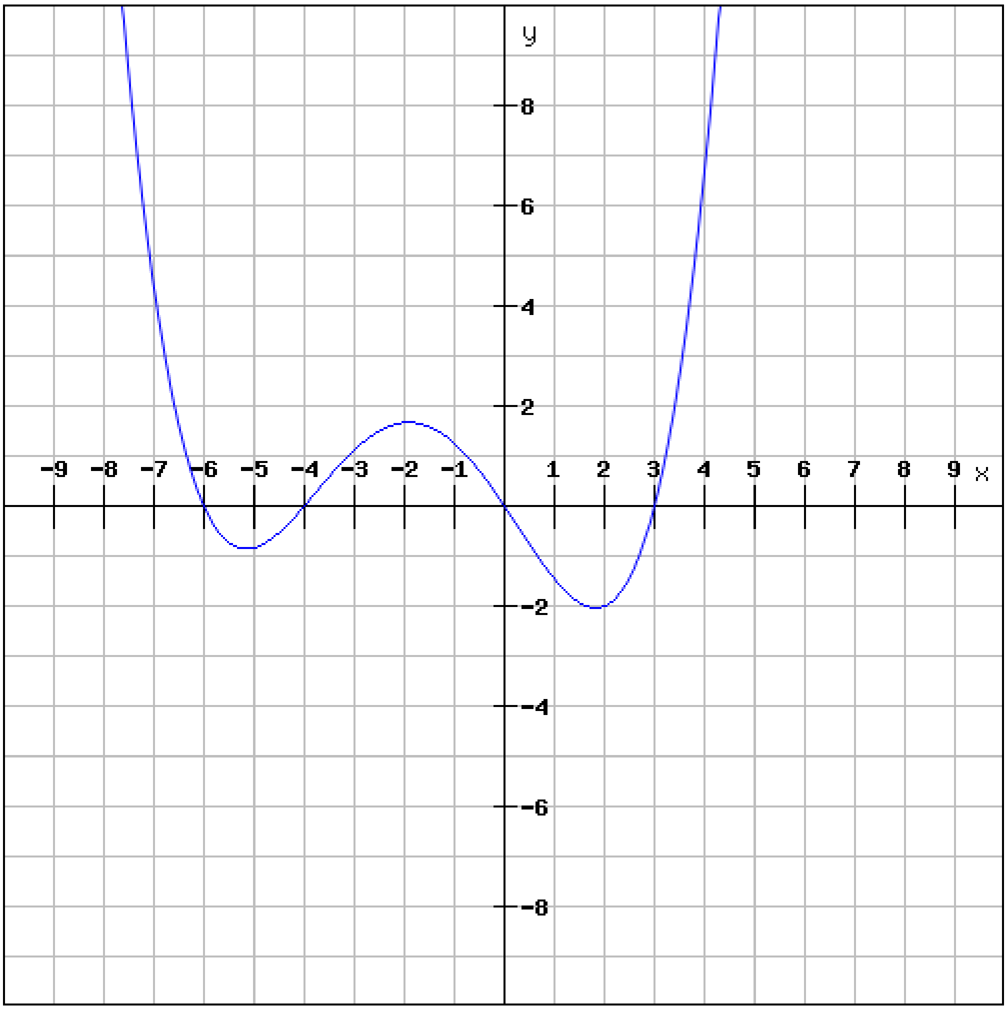
3) Gegeben ist das Schaubild. Stelle den zugehörigen Funktionsterm auf.



4) Gegeben ist das Schaubild. Stelle den zugehörigen Funktionsterm auf.



5) Gegeben ist das Schaubild. Stelle den zugehörigen Funktionsterm auf.



Textaufgaben: Finde den Term der Polynomfunktion

1)Wie lautet der Term einer Polynomfunktion sechsten Grades, die symmetrisch zur y-Achse ist.

Wählen Sie eine oder mehrere Antworten:

- ☐ $x^6 +3x^4+5x^2+5$
- ☐ $x^6+3x^4+5x^2$
- ☐ $x^6+3x^3+2x^2+1$
- ☐ x^4+2x^3+7x+5
- ☐ $6x^6+4x^4+2x^2+1$

2) Wie lautet der Term einer Polynomfunktion fünften Grades, die punktsymmetrisch zum Ursprung ist?

Wählen Sie eine oder mehrere Antworten:

- ☐ x^5+3x^3+5x+5
- ☐ $x^5-2x^4+x^2+x$
- ☐ x^5+3x^3-5x
- ☐ x^5+x^9+3
- ☐ x^5-3x^3+2x

3) Wie lautet der Term einer Polynomfunktion zweiten Grades, die vom zweiten in den ersten Quadranten verläuft?

Wählen Sie eine oder mehrere Antworten:

- ☐ $-2x^2+3x+1$
- ☐ x^2+20
- ☐ $2x^2+3x+2$
- ☐ $x^2 -3x^4+5x^2+5$
- ☐ $8x^2-15x+26$

4) Wie lautet der Term einer Polynomfunktion neunten Grades, die keine Achsensymmetrie und keine Symmetrie zum Ursprung aufweist?

Wählen Sie eine oder mehrere Antworten:

- ☐ $x^9+3x^4+11x^2-13$
- ☐ $x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$
- ☐ x^9+18x^3+7x
- ☐ x^9+18x^3+7x+1
- ☐ $x+3x^9+5x^5$

5) Wie lautet der Term einer Polynomfunktion zweiten Grades, die vom dritten in den vierten Quadranten verläuft?

Wählen Sie eine oder mehrere Antworten:

- ☐ $3x^2+3x+4$
- ☐ $-3x^2+3x+4$
- ☐ $x-2x^2+36$
- ☐ x^2+x+1
- ☐ $-x^2$

Polynomfunktionen -Verlauf des Schaubilds

Um zu erkennen, wie das Schaubild einer Polynomfunktion
(z.B. $p(x) = x^6 -3x^5 + x^2 +9$) verläuft, genügt es, den höchsten Exponenten (hier x^6) zu betrachten.

Einsetzen einer „großen" Zahl wie -1000 ergibt:
($(-1000)^6 = +1000000000000000000$).
Das Schaubild kommt aus dem zweiten Quadranten.
Einsetzen von 1000 ergibt $1000^6 = +1000000000000000000$. Das Schaubild verschwindet in den ersten Quadranten.
Beispiele:
$p(x)=x^5 + 4x^3 -7x^2 + 13$
Der höchste Exponent ist ………, also ……….
Das Schaubild kommt aus dem ……… Quadranten.
Das Schaubild verschwindet in den ……… Quadranten.

2)

$p(x)=x^8 + 5x^4 -7x^2 + 1$
Der höchste Exponent ist ………, also ……….
Das Schaubild kommt aus dem ……… Quadranten.
Das Schaubild verschwindet in den ……… Quadranten.

3)

$p(x)=-x^7 + 4x^5 +7x^3 -9$
Der höchste Exponent ist ………, also ………}. (Beachte aber das Vorzeichen)
Das Schaubild kommt aus dem ……… Quadranten.
Das Schaubild verschwindet in den ……… Quadranten.

4)

$p(x)=-x^4 + 4x^3 +8x +3$
Der höchste Exponent ist ………, also ……….
Das Schaubild kommt aus dem ……… Quadranten.
Das Schaubild verschwindet in den ……… Quadranten.

Zusammenhang von Funktionsterm und Schaubild erkennen

1) Für welchen Funktionsterm geht das zugehörige Schaubild durch den Ursprung?

Wählen Sie eine oder mehrere Antworten:
a) $f(x) = x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 2x$
b) $f(x) = 5x^4 + 7x^2 + 2x + 8$
c) $f(x) = 8x^3 + x^2 + 2x$
d) $f(x) = 7x^2 + 2x + 10$

2)

Für welchen Funktionsterm ist das zugehörige Schaubild symmetrisch zur y-Achse?

Wählen Sie eine oder mehrere Antworten:
a) $f(x) = x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 2x$
b) $f(x) = 5x^4 + 7x^2$

c) $f(x) = 8x^3 + x^2 + 2x$

d) $f(x) = 7x^3 + 2x + 10$

e) $f(x) = x^6 + 3x^4 + 7x^2$

f) $f(x) = x^4 + x^2$

3)

Für welchen Funktionsterm ist das zugehörige Schaubild punktsymmetrisch zum Ursprung?

Wählen Sie eine oder mehrere Antworten:
a) $f(x) = x^5 + 3x^3 + 2x$
b) $f(x) = 5x^4 + 7x^2 + x$

c) $f(x) = 8x^3 + x$

d) $f(x) = 7x^3 + 2x + 10$

e) $f(x) = x^7 + 3x^3 + 7x$

4) Formuliere einen Merksatz:

Das Schaubild einer Polynomfunktion geht genau dann durch den Ursprung, wenn ….
a) alle Hochzahlen gerade sind und ein konstanter Summand im Funktionsterm vorhanden ist

b) alle Hochzahlen ungerade sind und ein konstanter Summand im Funktionsterm kein konstanter Summand im Funktionsterm vorhanden ist

5)

Formuliere einen Merksatz:

Das Schaubild einer Polynomfunktion ist genau dann punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn ….

a) alle Hochzahlen gerade sind
b)alle Hochzahlen ungerade sind und kein konstanter Summand im Funktionsterm vorhanden ist.
c)kein konstanter Summand im Funktionsterm vorhanden ist.

Verlauf eines Schaubilds untersuchen

Polynomfunktion- globaler Verlauf des Schaubilds

Verlauf des Schaubilds einer Polynomfunktion:

Um zu erkennen, wie das Schaubild einer Polynomfunktion (z.B. $p(x) = x^6-3x^5+x^2+9$) verläuft, genügt es, den höchsten Exponenten (hier x^6) zu betrachten.

Einsetzen einer „großen" Zahl wie -1000 ergibt: $((-1000)^6 = +1000000000000000000)$. Das Schaubild kommt aus dem zweiten Quadranten.

Einsetzen von 1000 ergibt $1000^6 = +1000000000000000000$. Das Schaubild verschwindet in den ersten Quadranten.

ergänze folgende Tabelle:

Term der Polynomfunktion	Höchster Exponent	Schaubild kommt aus dem	Vorzeichen	Schaubild verschwindet in den
$x^5+4x^3-7x^2+13$		Quadranten		Quadranten
$x^8+5x^4-7x^2+1$		Quadranten		Quadranten
$-x^7+4x^3+7x^3-9$		Quadranten		Quadranten
$-x^4+4x^3+8x+3$		Quadranten		Quadranten

Untersuchung von ganzrationalen Funktionen dritten Grades

1)

Folgendes Rezept kann zum Skizzieren des Schaubildes K_f einer ganzrationalen Funktion 3. Grades sinnvoll sein:

1. Berechne die Schnittpunkte mit der x-Achse.
2. Bestimme den Schnittpunkt mit der y-Achse.
3. Untersuche f(x) auf das Verhalten für „große" x-Werte.
4. Untersuche das Schaubild K_f von f auf Punktsymmetrie zu O(0|0).

Beispiel: $f(x)= \frac{1}{2}x^3-2x$

2)

Folgendes Rezept kann zum Skizzieren des Schaubildes K_f einer ganzrationalen Funktion 3. Grades sinnvoll sein:

1. Berechne die Schnittpunkte mit der x-Achse.
2. Bestimme den Schnittpunkt mit der y-Achse.
3. Untersuche f(x) auf das Verhalten für „große" x-Werte.
4. Untersuche das Schaubild K_f von f auf Punktsymmetrie zu O(0|0).

Beispiel: $f(x)= -3x^3+6x^2$

3)

Folgendes Rezept kann zum Skizzieren des Schaubildes K_f einer ganzrationalen Funktion 3. Grades sinnvoll sein:

1. Berechne die Schnittpunkte mit der x-Achse.
2. Bestimme den Schnittpunkt mit der y-Achse.
3. Untersuche f(x) auf das Verhalten für „große" x-Werte.
4. Untersuche das Schaubild K_f von f auf Punktsymmetrie zu O(0|0).

Beispiel: $f(x)= (x-1)^3$

Transformation von Funktionen

Transformation von Funktionen (J1)

Gegeben sind die Funktionen im ersten Kasten. Ergänzen Sie die Transormationen in den übrigen Kästen

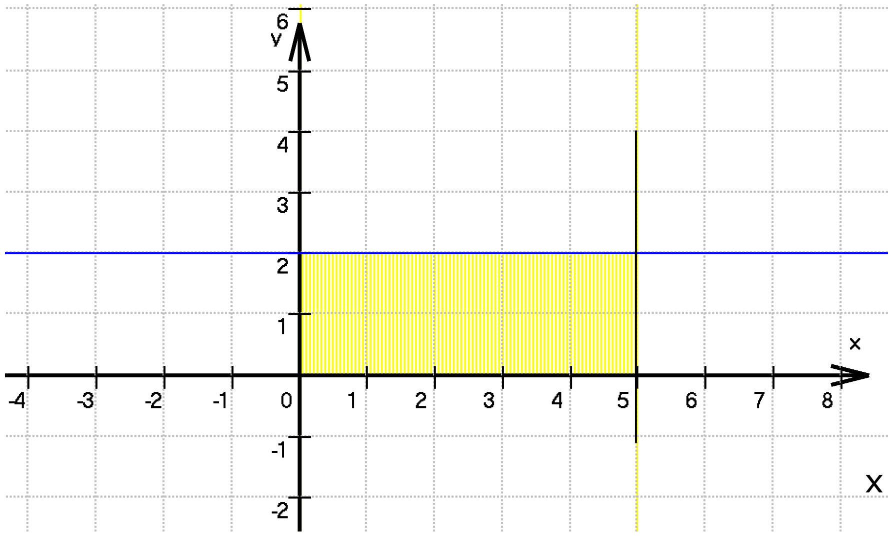
$f(x) = e^x$ $f(x) = 2^x$ $f(x) = \sin(x)$ $f(x) = \cos(x)$ $f(x) = \sqrt{x}$ $f(x) = x^2$	f(x)= f(x)= f(x)= f(x)= f(x)= f(x)= f(x)= um 3 nach links verschoben	f(x)= f(x)= f(x)= f(x)= f(x)= f(x)= f(x)= an der y-Achse gespiegelt
f(x)= f(x)= f(x)= f(x)= f(x)= f(x)= f(x)= an der x-Achse gespiegelt	f(x)= f(x)= f(x)= f(x)= f(x)= f(x)= f(x)= mit dem Faktor 3 in x-Richtung gestaucht	f(x)= f(x)= f(x)= f(x)= f(x)= f(x)= f(x)= mit dem Faktor 3 in y-Richtung gestreckt
f(x)= f(x)= f(x)= f(x)= f(x)= f(x)= f(x)= mit dem Faktor 1/3 in x-Richtung gestreckt	f(x)= f(x)= f(x)= f(x)= f(x)= f(x)= f(x)= mit dem Faktor 1/3 in y-Richtung gestaucht	

Stammfunktion, Flächeninhaltsfunktion,
Fläche zwischen zwei Schaubildern

Flächeninhaltsfunktion

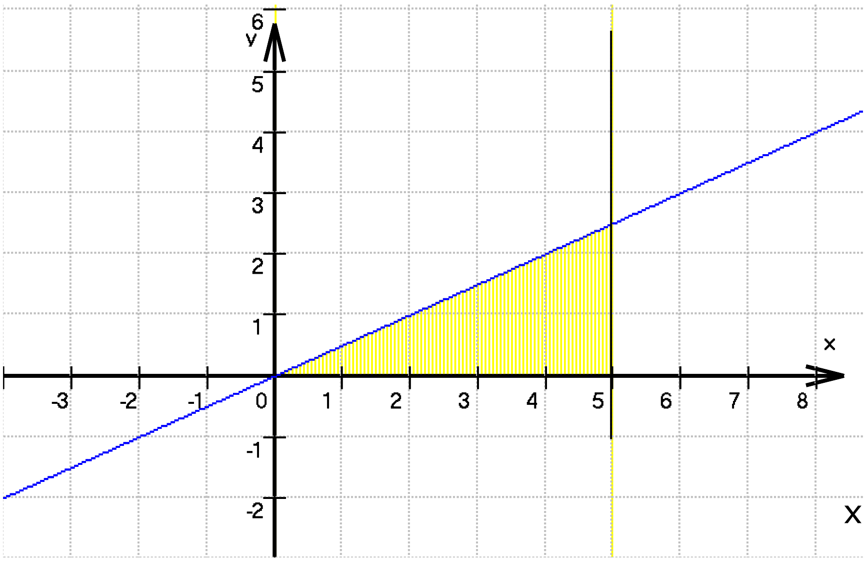
Die Flächeninhaltsfunktion F(x) gibt den Inhalt der Fläche unterhalb eines Schaubilds von der Stelle 0 bis zur Stelle x an.

1) **Beispiel:** $f(x)=2$



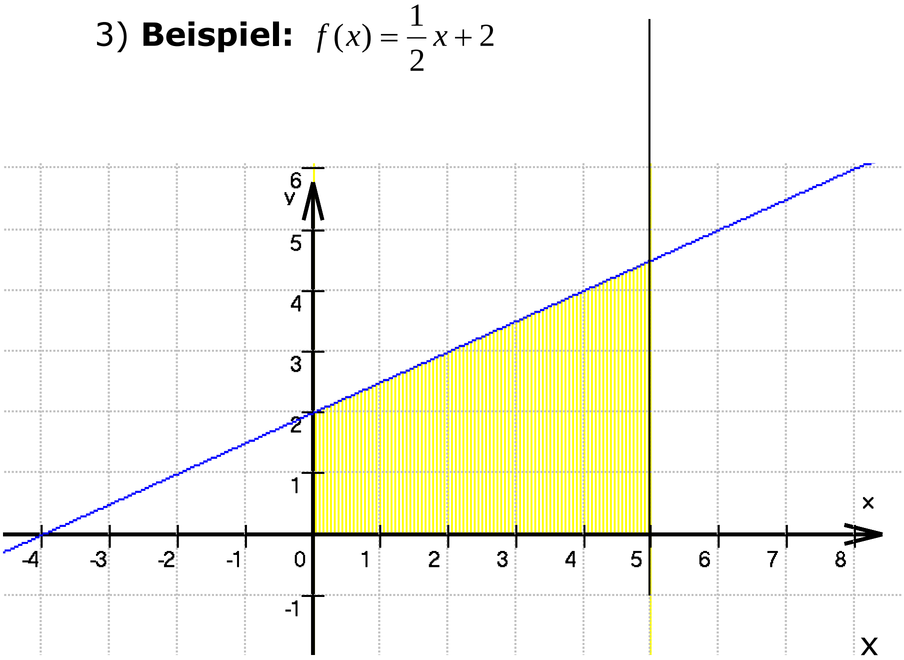
Der Flächeninhalt beträgt F(x)=

2) **Beispiel:** $f(x)=\frac{1}{2}x$



Der Flächeninhalt beträgt F(x)=

3) **Beispiel:** $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$

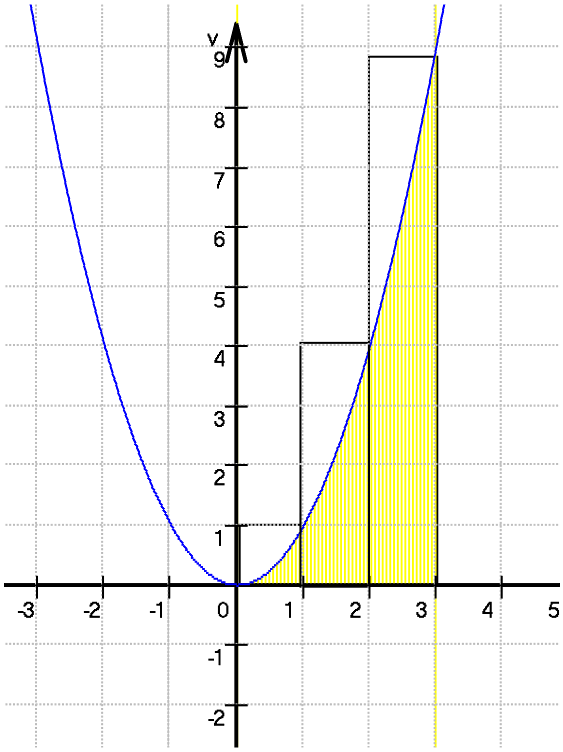


Der Flächeninhalt beträgt F(x)=

4) **Beispiel:** $f(x) = x^2$

Bei einer krummlinig begrenzten Fläche wird die Fläche in Rechtecke eingeteilt, und als Näherung die Rechtecksobersumme berechnet. Je kleiner die Rechtecksbreite Δx, desto genauer das Ergebnis.

Stammfunktion, Flächeninhaltsfunktion, Fläche zwischen zwei Schaubildern



$$F(x) = f(1\cdot\Delta x)\cdot\Delta x + f(2\cdot\Delta x)\cdot\Delta x + f(3\cdot\Delta x)\cdot\Delta x + ... + f(n\cdot\Delta x)\cdot\Delta x$$

$$= 1\cdot\Delta x^2\cdot\Delta x + 4\cdot\Delta x^2\cdot\Delta x + 9\cdot\Delta x^2\cdot\Delta x + ... + n^2\cdot\Delta x^2\cdot\Delta x$$

$$= \Delta x^3\cdot(1+4+9+...+n^2)$$

$$= \Delta x^3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$= (\frac{x}{n})^3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{6}x^3\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{(n+1)}{n}\cdot\frac{(2n+1)}{n} = \frac{1}{6}x^3\cdot 1\cdot 1\cdot 2$$

$$= \frac{1}{3}x^3$$

Zusammenfassung der Beispiele und Herleitung eines allgemeinen Zusammenhanges zum Auffinden einer Flächeninhaltsfunktion bei Polynomfunktionen:

f(x)	f(x)=2	$f(x) = \frac{1}{2}x$	$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$	$f(x) = x^2$
F(X)	F(x)=	F(x)=	F(x)=	F(x)=

Merke: die Flächeninhaltsfunktion bei Polynomfunktionen erhält man, indem man die Hochzahl um 1 vergrößert und den Kehrwert dieser Zahl zusätzlich als Faktor vor die Funktionsvorschrift schreibt.

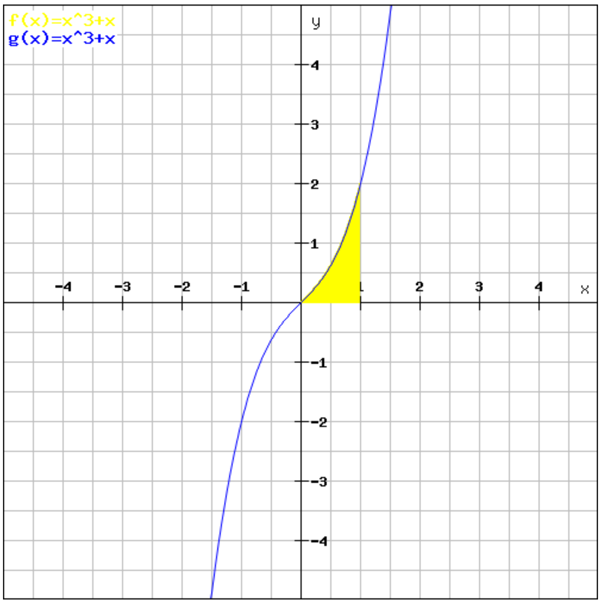
Somit gilt für $f(x)=x^n$ ist $F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ eine zugehörige Flächeninhaltsfunktion.

Flächeninhaltsberechnung

Die Funktion f mit , $f(x) = a \cdot x^3 + x$, $a \neq 0$ schließt mit der x-Achse und der Geraden $x = 1$ eine Fläche vom Inhalt 1 ein.

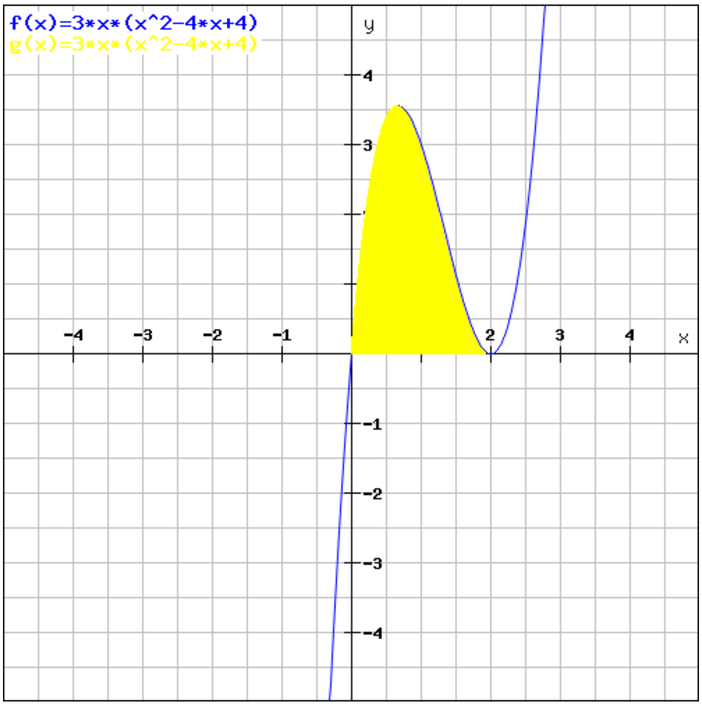
Bestimme den Parameter a.

Lösungsweg: Skizziere die Funktion zur besseren Übersicht kurz, z.B. für $a=1$.

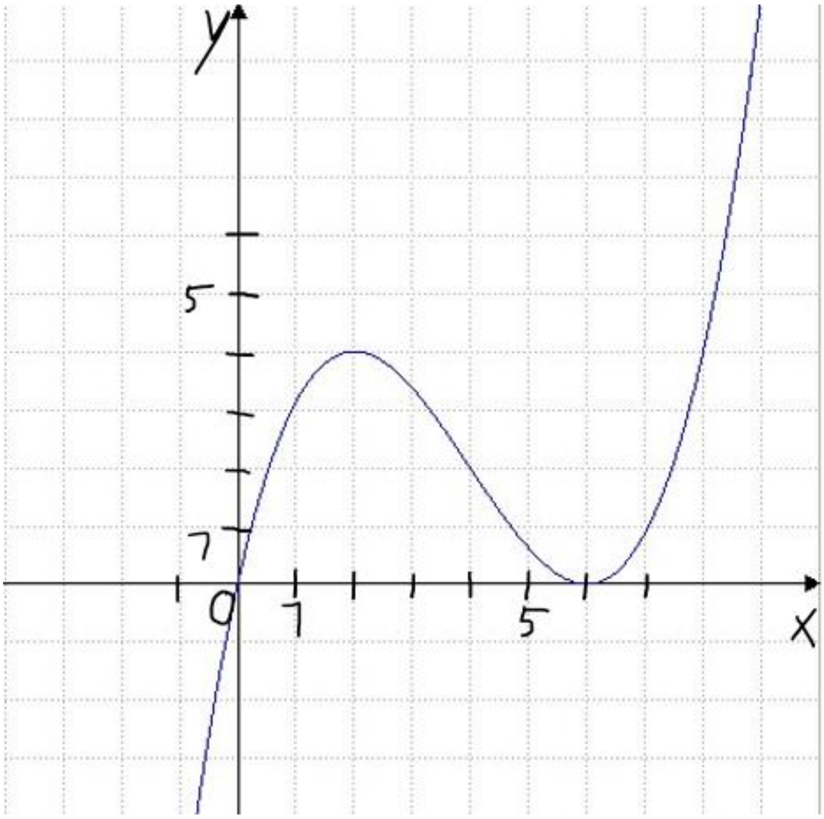


Das Schaubild K_f der Funktion f mit $f(x)=3 \cdot x \cdot (x-2)^2$ schließt mit der x-Achse im ersten Quadranten eine Fläche. Berechne exakt ihren Flächeninhalt.

Lösungsweg: Skizziere die Funktion zur besseren Übersicht kurz.



Fläche zwischen Wendetangente und Schaubild (J2)



Stellen Sie die Funktionsgleichung zum angegebenen Schaubild auf.

f(x) = a·x· $(x-6)^2$

f(2)=4 ⇒ a·2· $(2-6)^2$=4

a · 2 · 16=4

a = $\frac{1}{8}$

also: f(x)= $\frac{1}{8}$ ·x· $(x-6)^2$

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der Wendetangente an K_f.

Stammfunktion, Flächeninhaltsfunktion,

Fläche zwischen zwei Schaubildern

[Stammfunktion bestimmen (J2)]

Bestimmen Sie eine Stammfunktion:

a) f(x)= $3x^3$ b) f(x)=$\frac{1}{5}x^4+4x^3+x^2+1$ c) f(x)=$\sqrt{3}\,x+x^{100}$

d) f(x)=3 $\sqrt{x}$ e) f(x)= $x^3+3x^2+2x^9-16$ f) f(x)= $\frac{1}{x^5}+\frac{3}{x^2}+x^{99}$

g) f(x)= e^x h) f(x)=sin(x) i) f(x)=cos(x) j) f(x)= $\frac{1}{2}x$-sin(x)- $\frac{1}{3}\cos(x)$

k) f(x)=sin(x)-2e^x l) f(x)=sin(3x) m) f(x)= cos ($\frac{1}{5}x$) n) f(x)=sin(2x+5)

o) f(x)= e^{3x+5} o) f(x)=cos (-x-8) p) f(x)= - sin ($\frac{1}{2}x+19$)

Mit Hilfe dieser Stammfunktion kann also der Flächeninhalt zwischen dem Schaubild einer Funktion f(x) und der x-Achse berechnet werden. Der Flächeninhalt des Schaubilds von f(x)= f(x)= $\frac{1}{2}x^3$ vom Ursprung bis x ist F(x)= $\frac{1}{8}x^4$.

Der Flächeninhalt von 0 bis 2 ist

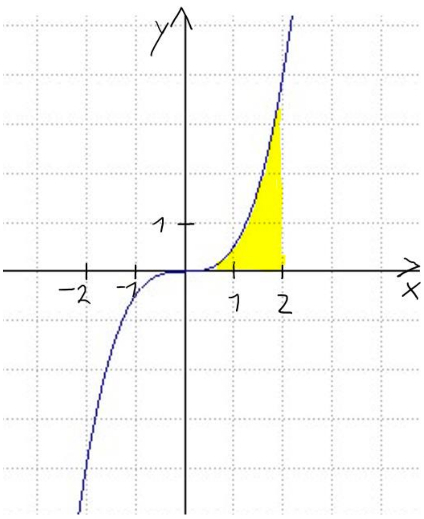
F(2)=$\frac{1}{8}2^4=2FE$

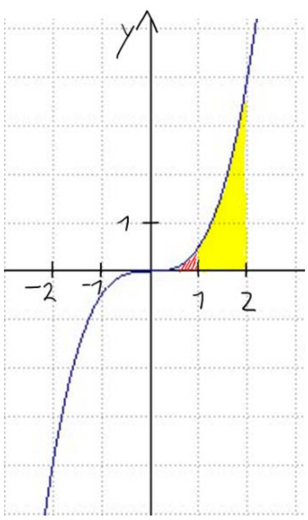
Der Flächeninhalt von 1 bis 2 ist

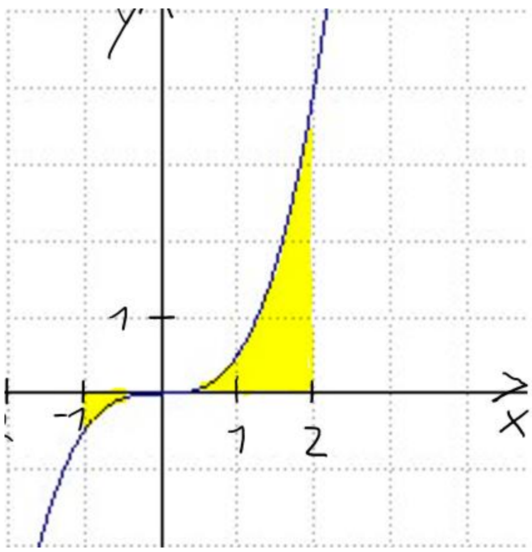
F(2) - F(1) = $\frac{1}{8}2^4-\frac{1}{8}1^4=1{,}875FE$

Der Flächeninhalt von -1 bis 2 ist

F(2) + F(-1) = $\frac{1}{8}2^4+\frac{1}{8}(-1)^4=2{,}125FE$







$\int_0^2 \frac{1}{2}x^3\,dx$ = F(2) - F(0)

$\int_1^2 \frac{1}{2}x^3\,dx$ = F(2)-F(1)

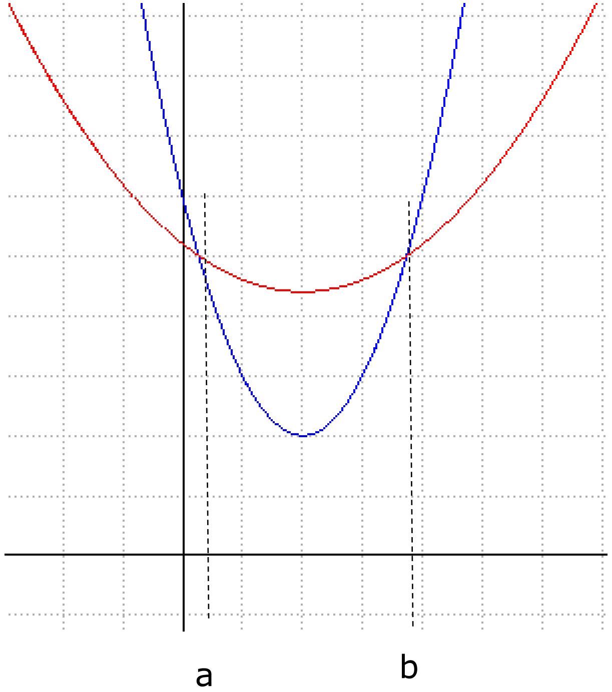
$-\int_{-1}^0 \frac{1}{2}x^3\,dx+\int_0^2 \frac{1}{2}x^3\,dx$= -F(0)+F(-1)+F(2)-F(0)

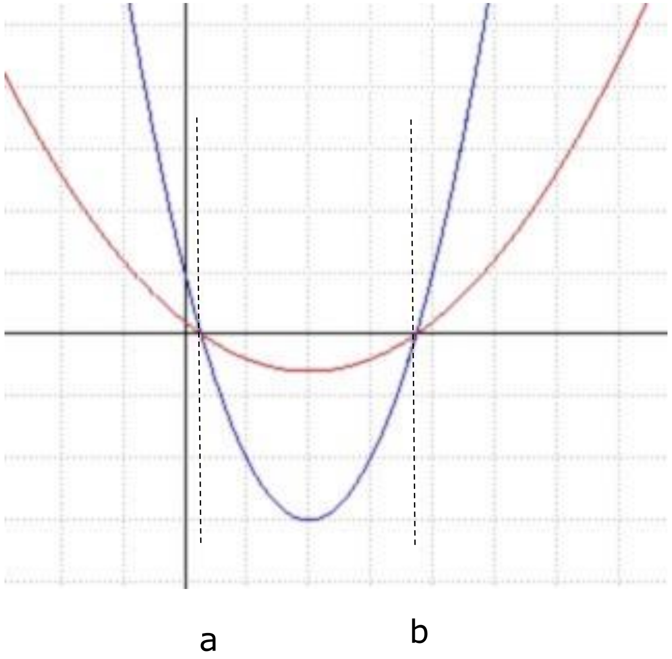
Die Vereinbarung ist so, dass Flächenstücke unterhalb der x-Achse negativ gewertet werden.

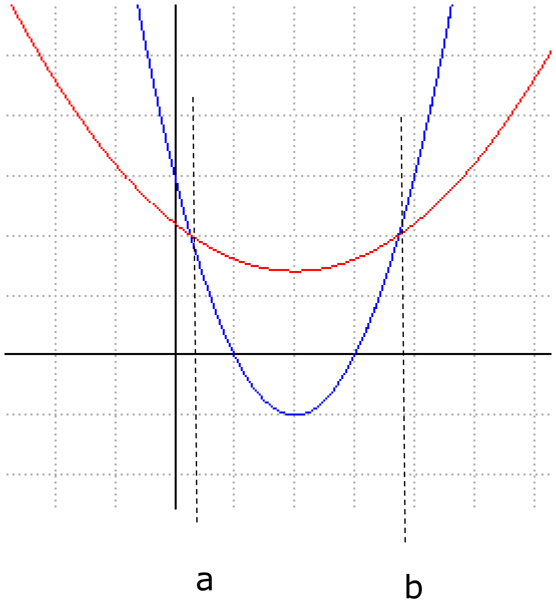
Allgemein: $\int_a^b f(x)\,dx$ **= F(b) - F(a)**

Berechnung der Fläche zwischen zwei Schaubildern mit Hilfe des Integrals (J2)

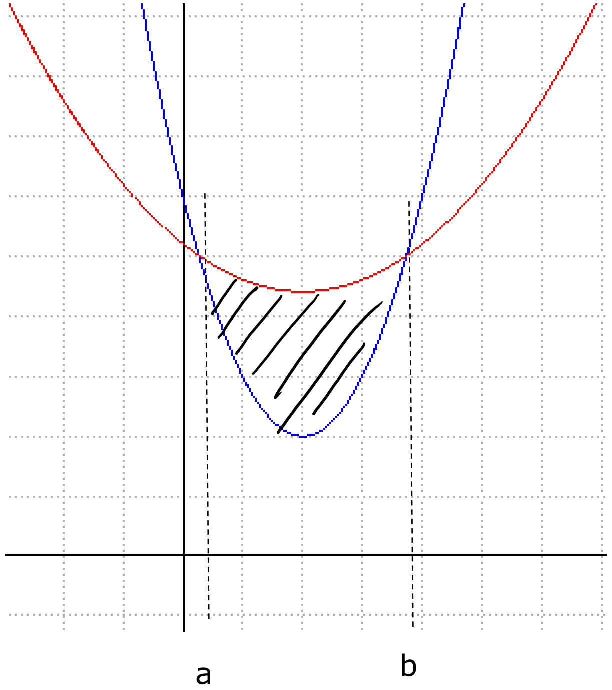
Wenn in einem Intervall von a bis b auf der x-Achse das Schaubild einer Funktion f(x) oberhalb vom Schaubild von g(x) verläuft, dann erhält man den Flächeninhalt der Fläche zwischen den Schaubildern durch $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$

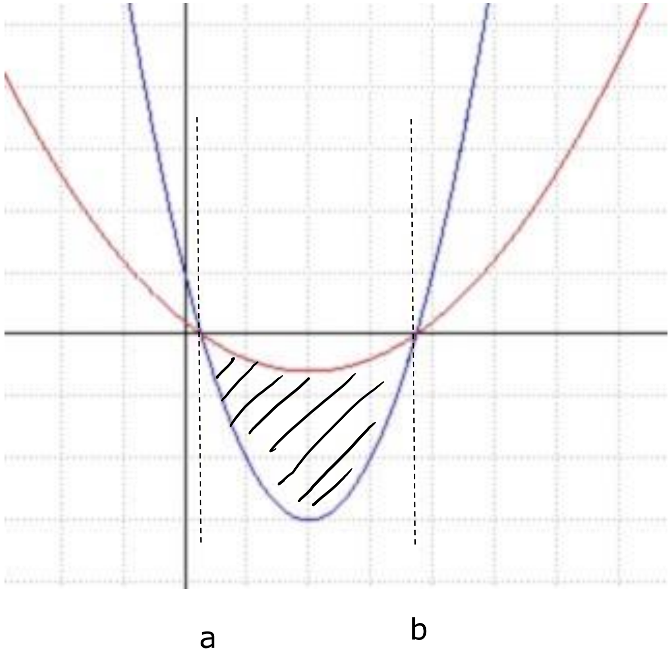


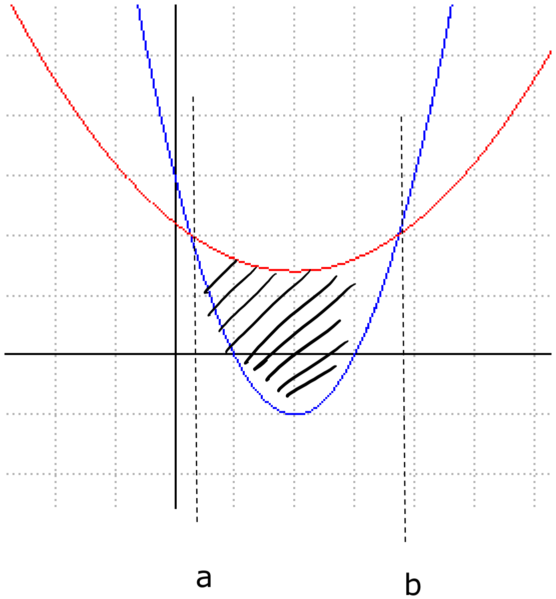


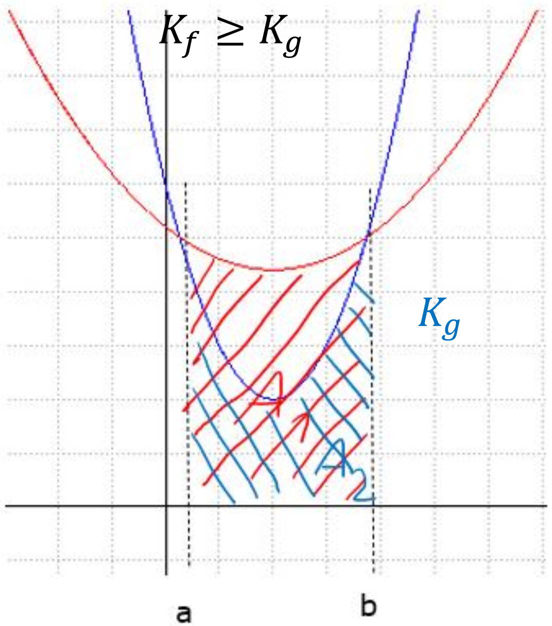


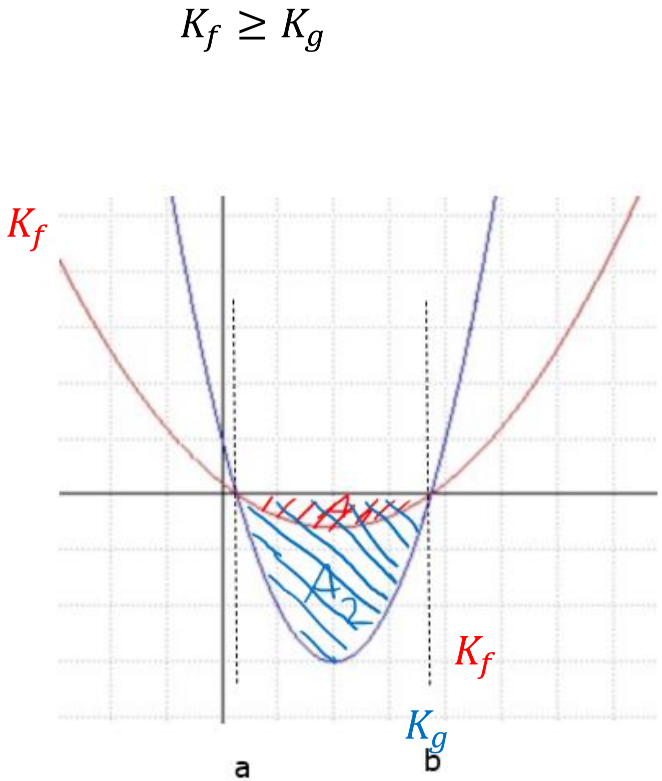
Stammfunktion, Flächeninhaltsfunktion, Fläche zwischen zwei Schaubildern

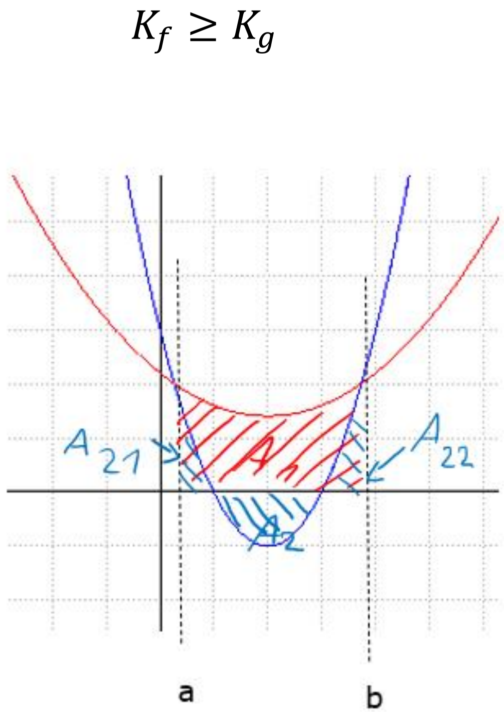







$K_f \geq K_g$
K_g
A_1
A_2
a
b


$K_f \geq K_g$
K_f
A_1
A_2
K_f
K_g
a
b


$K_f \geq K_g$
A_{21}
A_1
A_{22}
A_2
a
b

Das Integral wertet

A_1 positiv und A_2 positiv:

$\int_a^b (f(x) - g(x))dx = A_1 - A_2$

$= K_{gesucht}$

Das Integral wertet

A_1 negativ und A_2 negativ:

$\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$

$= -A_1 - - A_2 = A_2 - A_1$

$= K_{gesucht}$

Das Integral wertet

A_1 und A_{21} und A_{22} positiv und A_2 negativ:

$\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$

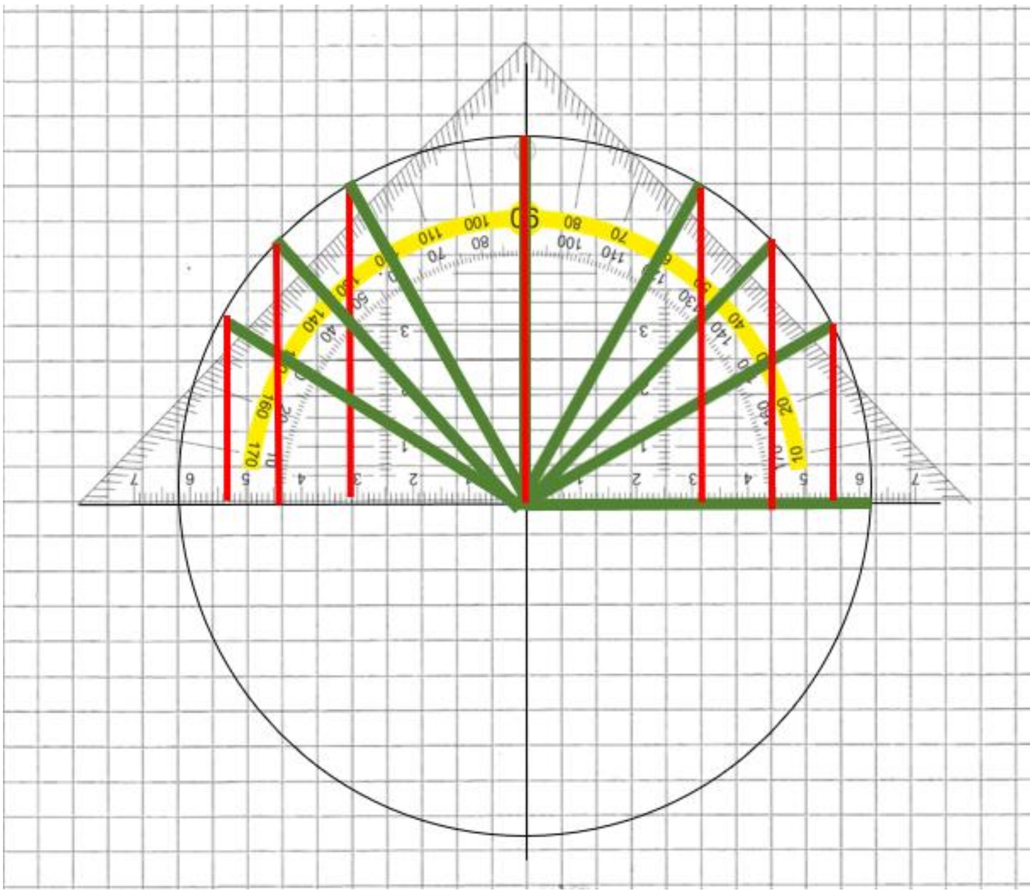
$= A_1 - A_{21} - A_{22} - - A_2 = K_{gesucht}$

Werte der Sinusfunktion am Einheitskreis ablesen (J1)

Zum besseren Verständnis messen oder berechnen wir **einige markante Sinuswerte ohne TR**:

Frage: Wie müsste man ein rechtwinkliges Dreieck zeichnen, damit die

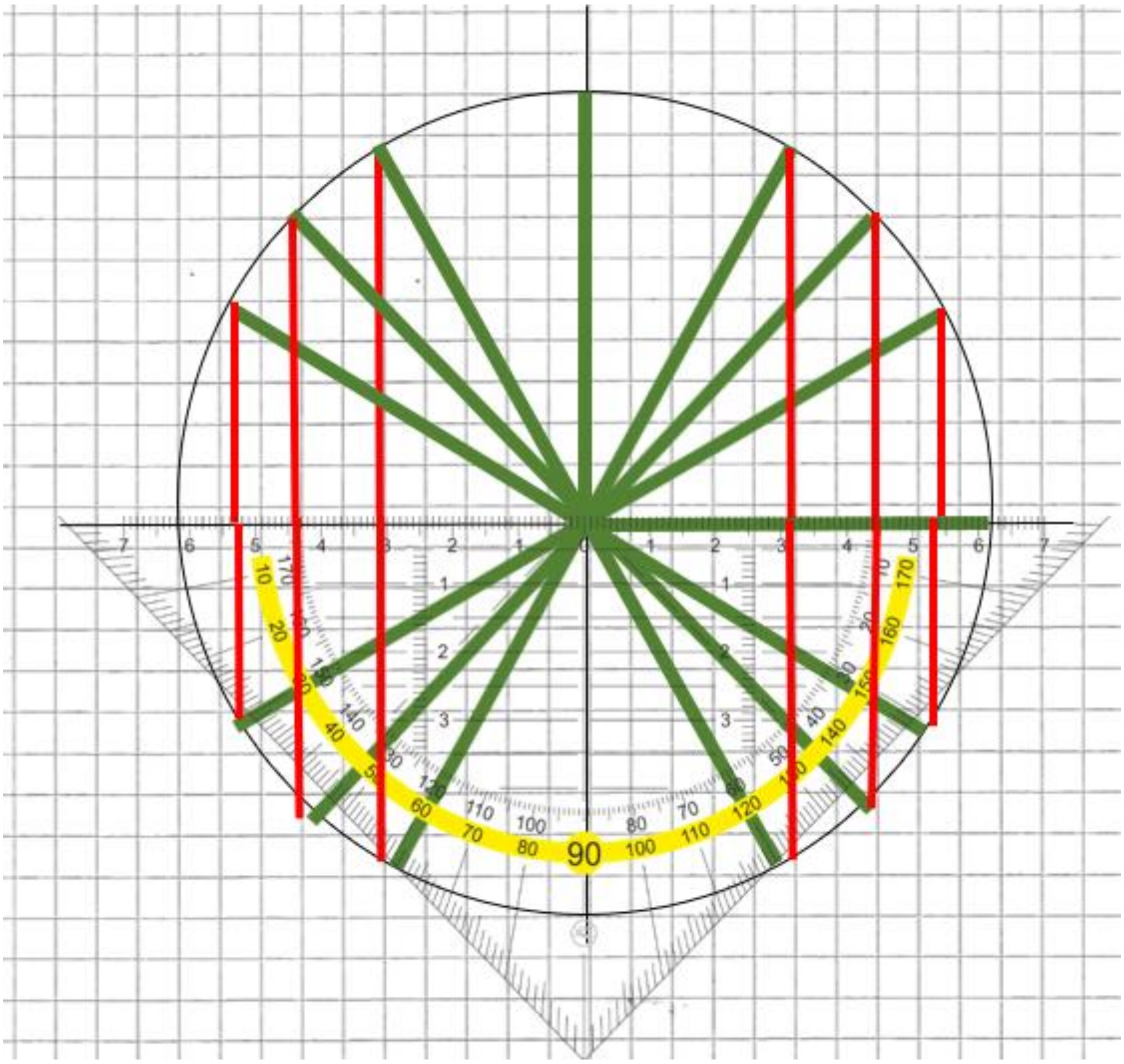
Gegenkathete von genau die Länge sin ∝ besitzt? (Antwort hier: 1Kästchen = 1 mm)



Schätzen Sie die Länge der roten Strecke auf eine Dezimalstelle in cm:

∝	0°	30°	45°	60°	90°
sin ∝					

∝	180°-0° =**180°**	180°-30° =**150°**	180°-45° =**135°**	180°-60° =**120°**
sin ∝				



∝	180°+0° =**180°**	180°+30° =**210°**	180°+45° =**225°**	180°+60° =**240°**
sin ∝				

∝	360°-0° =**360°**	360°-30° =**330°**	360°-45° =**315°**	360°-60° =**300°**
sin ∝				

[Werte der Cosinusfunktion am Einheitskreis ablesen (J1)]

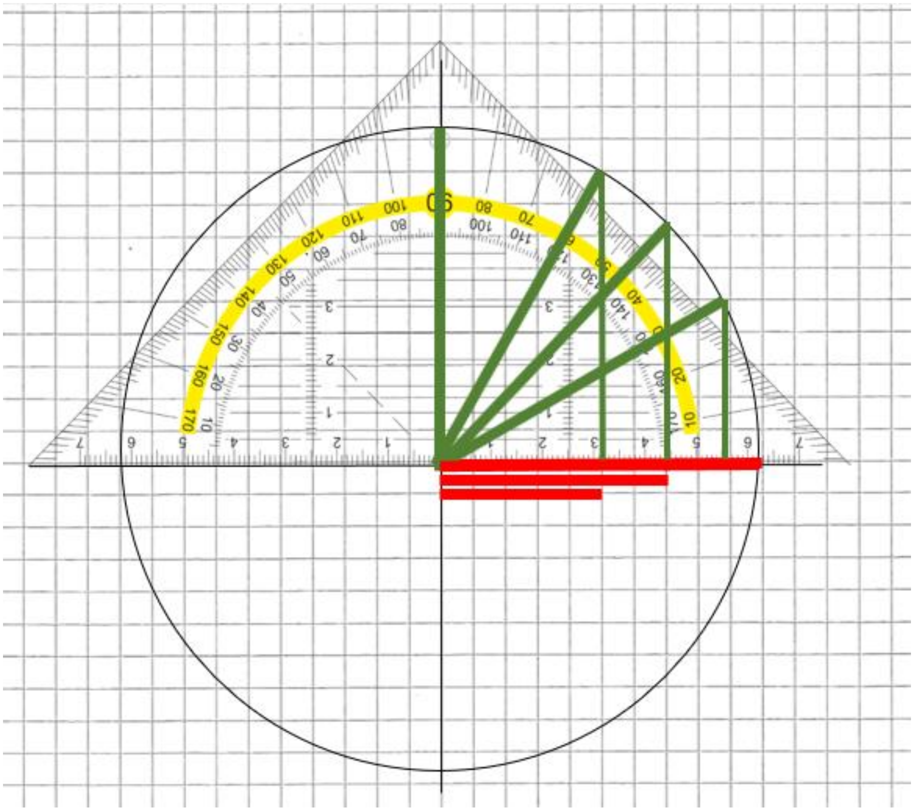
Cosinus eines Winkels α ist definiert als $\cos(\alpha) = \frac{Ankathete}{Hypotenuse}$ im rechtwinkligen Dreieck.

Die **Cosinus-Funktion** ordnet jedem Winkel α im rechtwinkligen Dreieck den zugehörigen Cosinuswert cos(α) zu.

Zum besseren Verständnis messen oder berechnen wir **einige markante Cosinuswerte ohne TR**:

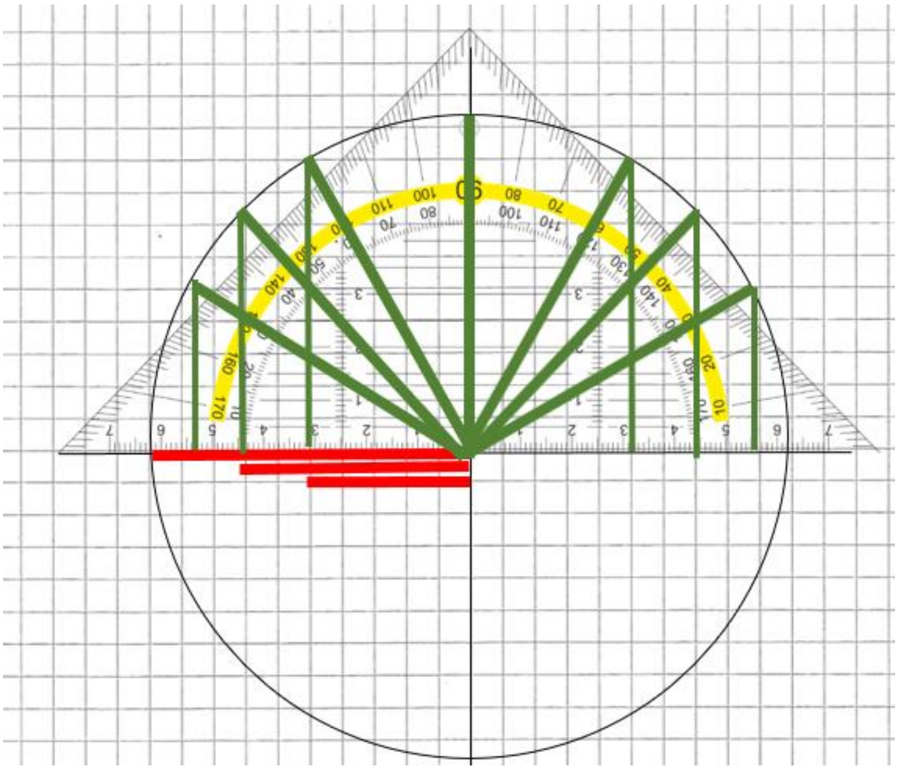
Frage: Wie müsste man ein rechtwinkliges Dreieck zeichnen, damit die Ankathete von α genau die Länge cos α besitzt?

(Antwort hier: 1Kästchen = 1 mm)

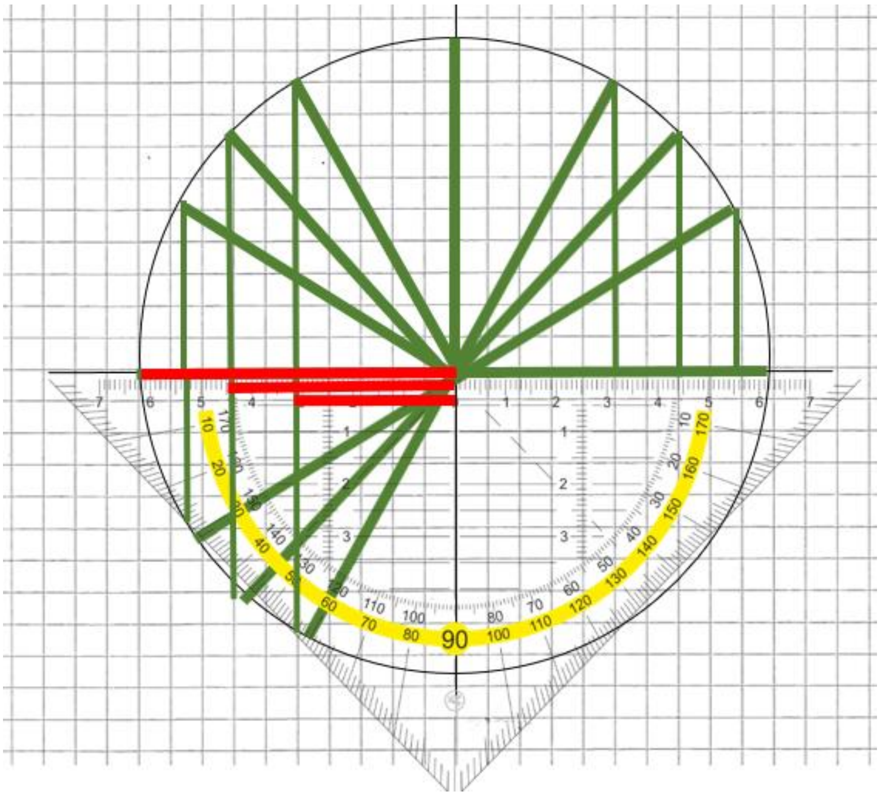


Schätzen Sie die Länge der roten Strecke auf eine Dezimalstelle in cm:

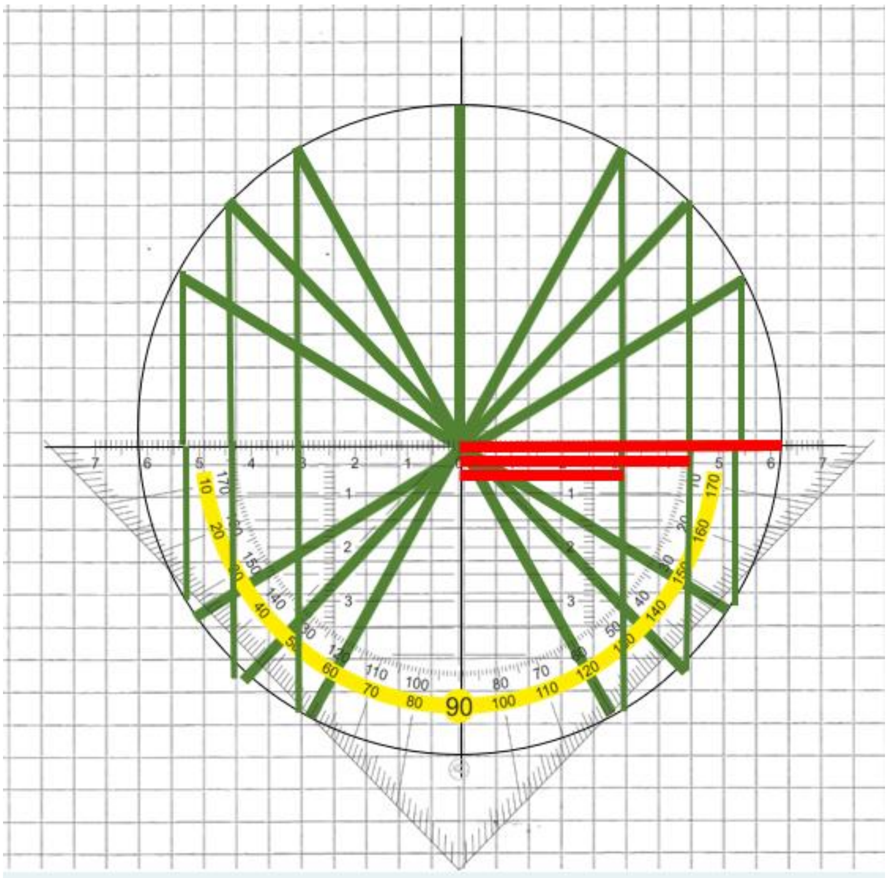
α	0°	30°	45°	60°	90°
cos α					



α	180°-0° = **180°**	180°-30° = **150°**	180°-45° = 1**35°**	180°-60° = **120°**
$\cos\alpha$				



α	180°+0° = **180°**	180°+30° = **210°**	180°+45° = **225°**	180°+60° = **240°**
$\cos\alpha$				



α	360°-0° = **360°**	360°-30° = **330°**	360°-45° = **315°**	360°-60° = **300°**
$\cos\alpha$				

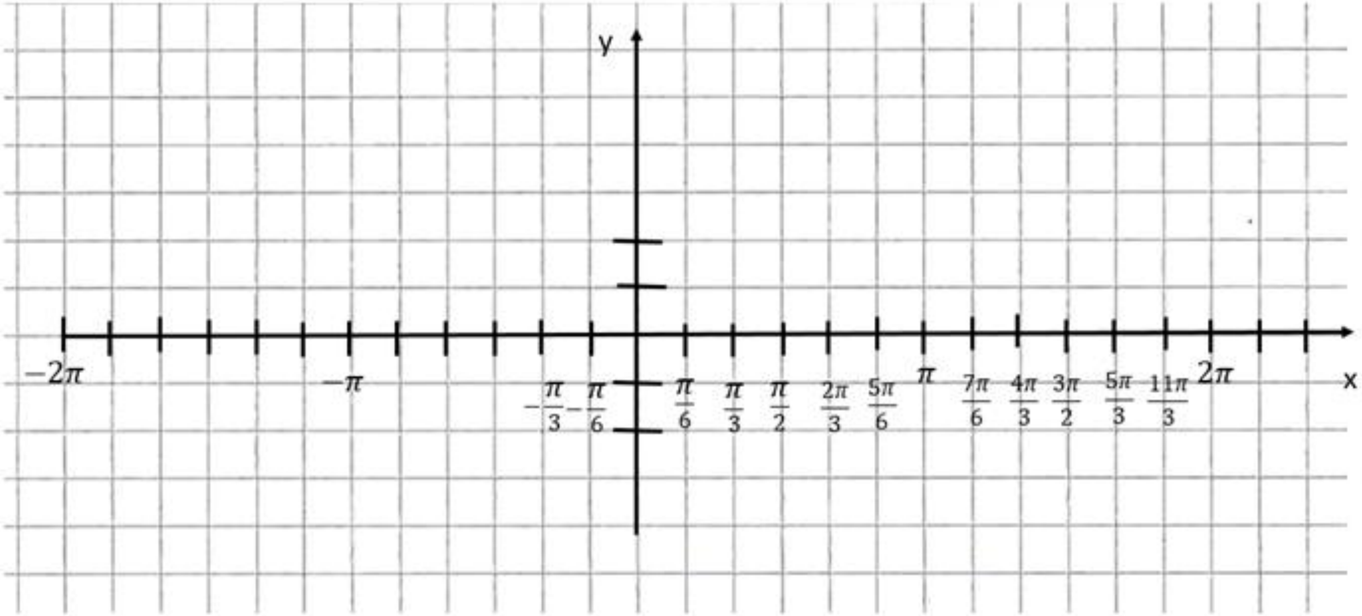
Sinusfunktion ins Koordinatensystem zeichnen (J1)

Zeichnen Sie die Sinusfunktion. Die x-Achse gibt üblicherweise die Winkel im Bogenmaß an.

Zum Zeichnen hilft Ihnen der Sinuswert als Dezimalzahl in der Tabelle.

Das Schaubild der (allgemeinen) Sinusfunktion

Achtung: Es ist praktisch, auf der x-Achse $\frac{\pi}{6}$ für ein Kästchen zu wählen.

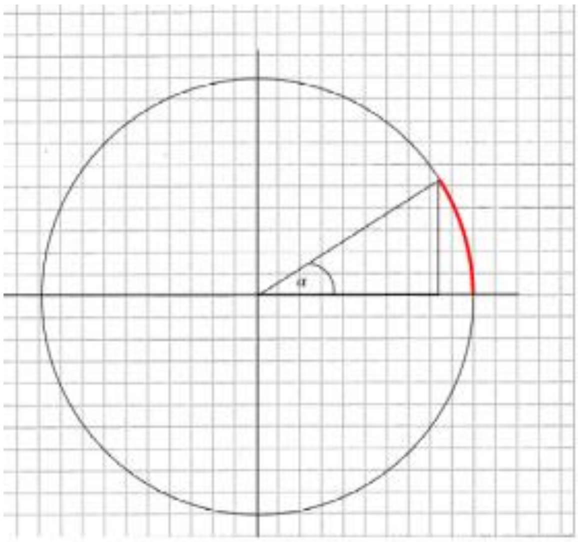


Winkel α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Bogenlänge	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
sin α	0	0,5	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0,5	0
sin α als Dezimalzahl	0	0,5	0,7	0,8	1	0,8	0,7	0,5	0

Das Bogenmaß (J1)

Um auch als Definitionsmenge reelle Zahlen zu haben, kann man die Winkel vom Gradmaß in das Bogenmaß umrechnen:

Dabei entspricht das Gradmaß des Winkels der Länge des zugehörigen Bogens am Einheitskreis (des Kreises mit Durchmesser 1LE)



(1 Kästchen sein 0,1LE)

Das Berechnen der Bogenlänge funktioniert mit der Verhältnisgleichung (Dreisatz) $\frac{\propto}{360°} = \frac{x}{2\pi}$ oder eben $x = \frac{\propto \cdot 2\pi}{360°}$ Berechnen Sie mit dem Taschenrechner und geben Sie die Werte auf eine Nachkommastelle gerundet ein.

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Länge des zugehörigen Bogens am Einheitskreis								

Folgende Überlegung kann auch die Länge des Bogenmaßes zu einigen besonders häufig genutzten Winkel liefern:

Der volle Kreis mit 360° entspricht einer Bogenlänge von 2π . Der halbe Kreis mit 180° entspricht einer Bogenlänge von π . Füllen Sie diese Tabelle mit dieser Überlegung ohne Taschenrechner aus:

Besondere Werte von Sinus:

Winkel	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Bogenlänge	0								

Mit dem Taschenrechner haben sie nun zwei Möglichkeiten. Entweder stellen Sie das Bogenmaß ein und berechnen damit sin für z.B. . Oder Sie stellen das Gradmaß ein und berechnen sin für 30°.

Winkel	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Bogenlänge	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
sin als Dezimalzahl									

Der Taschenrechner kann das Ergebnis für sin auch als Bruch liefern:

Winkel	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Bogenlänge	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
sin als Bruchzahl									

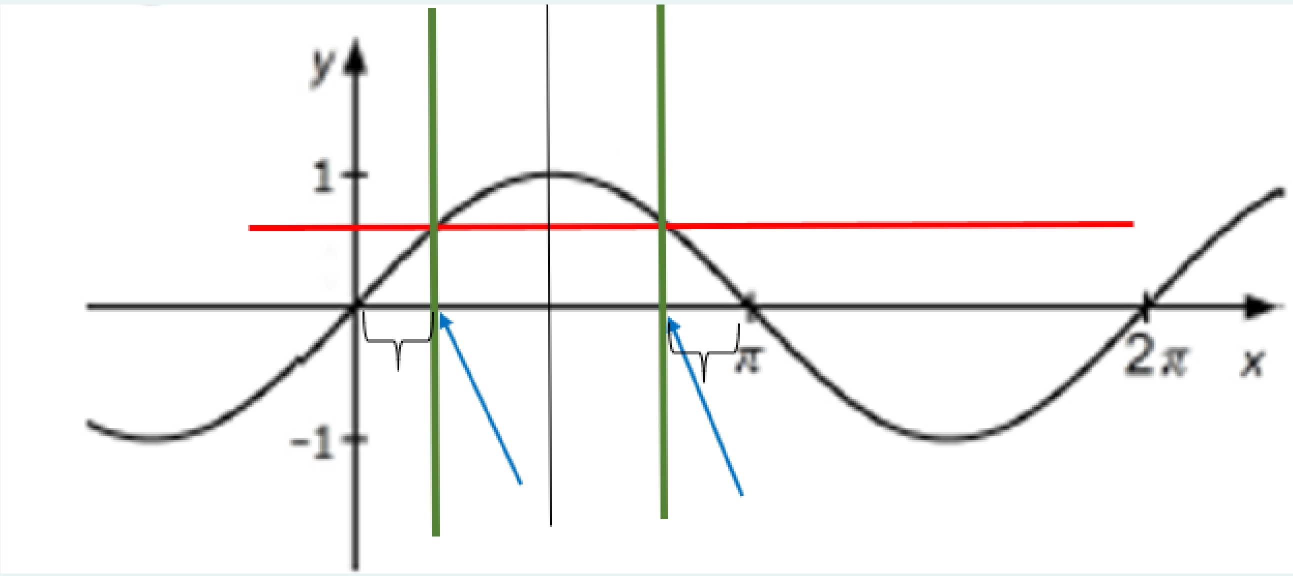
Trigonometrische Gleichungen lösen

1)

Ausgangssituation hier:

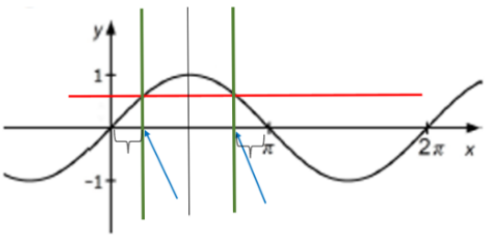
Die Gleichung ist umgeformt zu sin(x)= eine Zahl 0 und 1 ; der WTR steht auf

Beispiel: sin(x)=0,6



2)

Es reicht, die beiden Stellen im Intervall $[0;\pi]$ zu finden,
denn alle weiteren ergeben sich durch addieren von Vielfachen von 2π



(erster Fall, der angegebene y-Wert ist positiv, hier 0,6)

Beispiel: sin(x)=0,6

1) Der Taschenrechner (Achtung: Bogenmaß benutzen) nennt immer eine Lösung im Intervall $[0;\pi]$.

$x_1 = sin^{-1}(0{,}6)$

= dies ist eine der beiden Stellen (auf der x-Achse).

2) Die zweite Stelle liegt aus Symmetriegründen bei $\pi - sin^{-1}(0{,}6)$

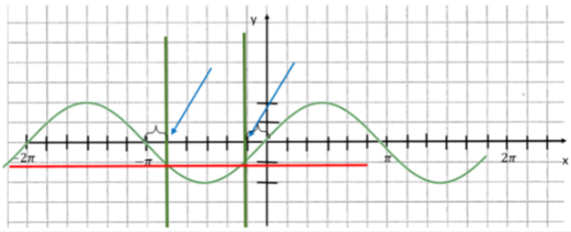
$x_2 = \pi - sin^{-1}(0{,}6)$

=

3) Zu den beiden Stellen $x_1$und x_2 können wir nun jeweils so oft 2 π addieren (oder abziehen), bis wir im von der Aufgabe gewünschten Intervall liegen.

3)

Es reicht, die beiden Stellen im Intervall $[0;\pi]$ zu finden,
denn alle weiteren ergeben sich durch addieren von Vielfachen von 2π



(erster Fall, der angegebene y-Wert ist negativ, hier -0,6)

Beispiel: sin(x)=-0,6

1) Der Taschenrechner (Achtung: Bogenmaß benutzen) nennt immer eine Lösung im Intervall $[-\pi;0]$.
$x_1 = sin^{-1}(-0{,}6)$

= [ ] dies ist eine der beiden Stellen (auf der x-Achse).

2) Die zweite Stelle liegt aus Symmetriegründen bei $x_2 = -\pi - sin^{-1}(0{,}6)$

= [ ]

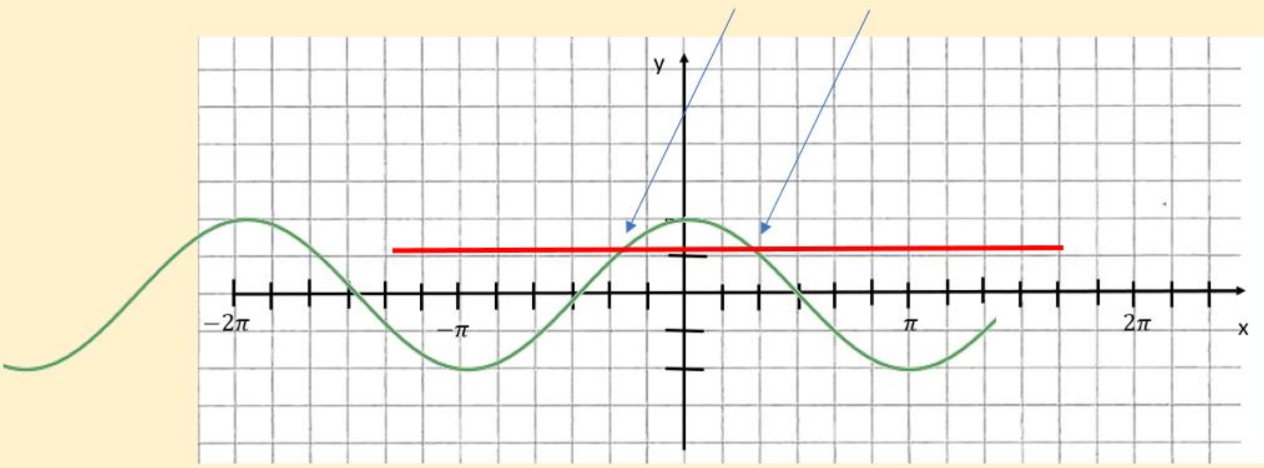
3) Zu den beiden Stellen x_1 und x_2 können wir nun jeweils so oft 2 π addieren (oder abziehen), bis wir im von der Aufgabe gewünschten Intervall liegen.

4)

Ausgangssituation hier:

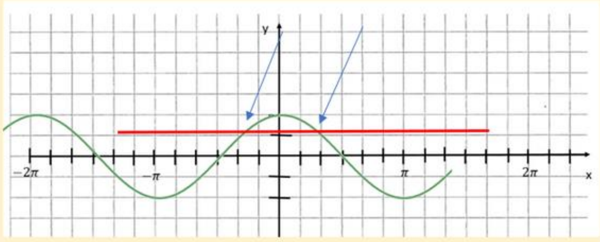
Die Gleichung ist umgeformt zu cos(x)= eine Zahl 0 und 1 ; der WTR steht auf [ ]

Beispiel: cos(x)=0,6



5)

Es reicht, die beiden Stellen im Intervall $[0;\pi]$ zu finden,
denn alle weiteren ergeben sich durch addieren von Vielfachen von 2π



(erster Fall, der angegebene y-Wert ist positiv, hier 0,6)

Beispiel: cos(x)=0,6

1) Der Taschenrechner (Achtung: Bogenmaß benutzen) nennt immer eine Lösung im Intervall $[0;\pi]$.

$x_1 = cos^{-1}(0{,}6)$

= dies ist eine der beiden Stellen (auf der x-Achse).

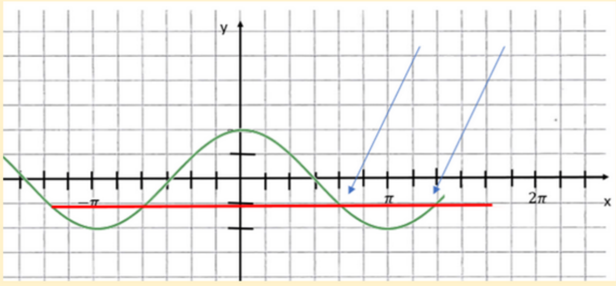
2) Die zweite Stelle liegt aus Symmetriegründen bei $x_2 = -cos^{-1}(0{,}6)$

=

3) Zu den beiden Stellen x_1 und x_2 können wir nun jeweils so oft 2 π addieren (oder abziehen), bis wir im von der Aufgabe gewünschten Intervall liegen.

6)

Es reicht, die beiden Stellen im Intervall $[0;\pi]$ zu finden,
denn alle weiteren ergeben sich durch addieren von Vielfachen von 2π



(zweiter Fall, der angegebene y-Wert ist positiv, hier -0,6)

Beispiel: cos(x)=-0,6

1) Der Taschenrechner (Achtung: Bogenmaß benutzen) nennt immer eine Lösung im Intervall $[0;\pi]$.

$x_1 = cos^{-1}(-0{,}6)$

= dies ist eine der beiden Stellen (auf der x-Achse).

2) Die zweite Stelle liegt aus Symmetriegründen bei

$x_2 = \pi - (cos^{-1}(0{,}6) - \pi) = 2\pi \; - cos^{-1}\,(0{,}6) \; = \; 2\pi$ - 2,2143

=

3) Zu den beiden Stellen x_1 und x_2 können wir nun jeweils so oft 2 π addieren (oder abziehen), bis wir im von der Aufgabe gewünschten Intervall liegen.