

Analysis (Funktionen)

Extremstellen, Wendepunkte, Kurvendiskussion

[Von der Sekante zur Tangente](#)

[Von der Funktion zur Ableitungsfunktion](#)

[Idee der Ableitungsfunktion](#)

[Ableitung, Extremstellen](#)

[Ein Kriterium zur Berechnung von Extremstellen finden](#)

[Ableitungsregeln anwenden \(J1\)](#)

[Bestimmung von Hoch- und Tiefpunkten \(Extremstellen\) mit Vorzeichenwechsel von \$f'\$ \(J1\)](#)

[Monotoniebereiche und Extremstellen \(J1\)](#)

[Übersicht über die Kriterien zur Kurvendiskussion \(J1\)](#)

[Ableitung und Extremstellen](#)

[Wendepunkt, Krümmungsverhalten](#)

[Kurvendiskussion](#)

[Wendepunkte](#)

[Extremstellen, Wendepunkt](#)

[Umkehrfunktion](#)

Extremstellen, Wendetangente

[Extremstellen, Wendetangente, 3](#)

[Extremstellen, Wendetangente, 2](#)

[Extremstellen, Wendetangente](#)

Gleichung modellieren, Polynomfunktion

[Textaufgaben zum Aufstellen von Funktionsgleichungen](#)

[Textaufgabe. Finde den Term der Funktion](#)

[Finde den Funktionsterm zu gegebenem Schaubild](#)

[Textaufgaben: Finde den Term der Polynomfunktion](#)

Verlauf eines Schaubilds untersuchen

[Polynomfunktionen -Verlauf des Schaubilds](#)

[Zusammenhang von Funktionsterm und Schaubild erkennen](#)

[Polynomfunktion- globaler Verlauf des Schaubilds](#)

[Untersuchung von ganzrationalen Funktionen dritten Grades](#)

Transformation von Funktionen

[Transformation von Funktionen \(J1\)](#)

Stammfunktion, Flächeninhaltsfunktion, Fläche zwischen zwei Schaubildern

[Wiederholung der Kurvendiskussion vor der Einführung der Integralrechnung](#)

[Flächeninhaltsfunktion](#)

[Flächeninhaltsberechnung](#)

[Fläche zwischen Wendetangente und Schaubild \(J2\)](#)

[Stammfunktion bestimmen \(J2\)](#)

[Berechnung der Fläche zwischen zwei Schaubildern mit Hilfe des Integrals \(J2\)](#)

Trigonometrische Funktionen

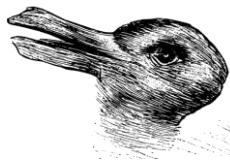
[Werte der Sinusfunktion am Einheitskreis ablesen \(J1\)](#)

[Werte der Cosinusfunktion am Einheitskreis ablesen \(J1\)](#)

[Sinusfunktion ins Koordinatensystem zeichnen \(J1\)](#)

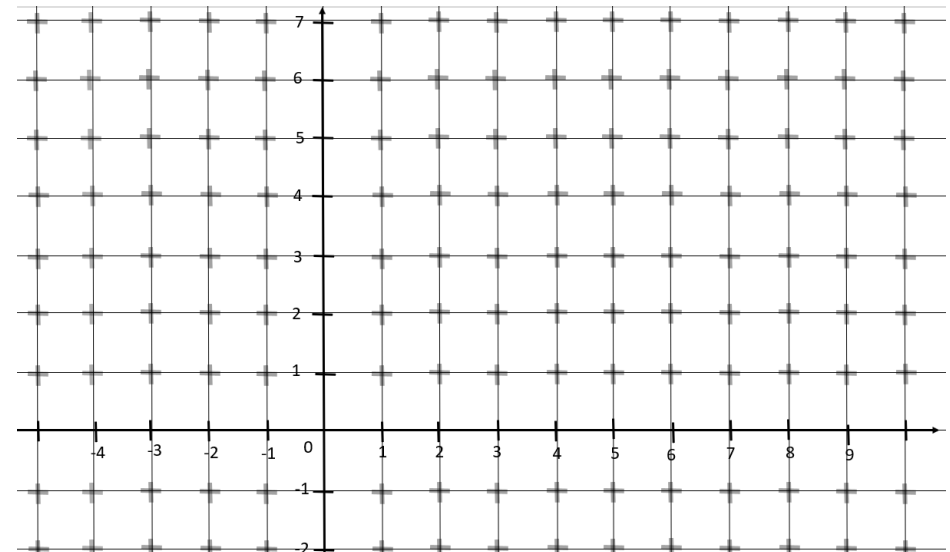
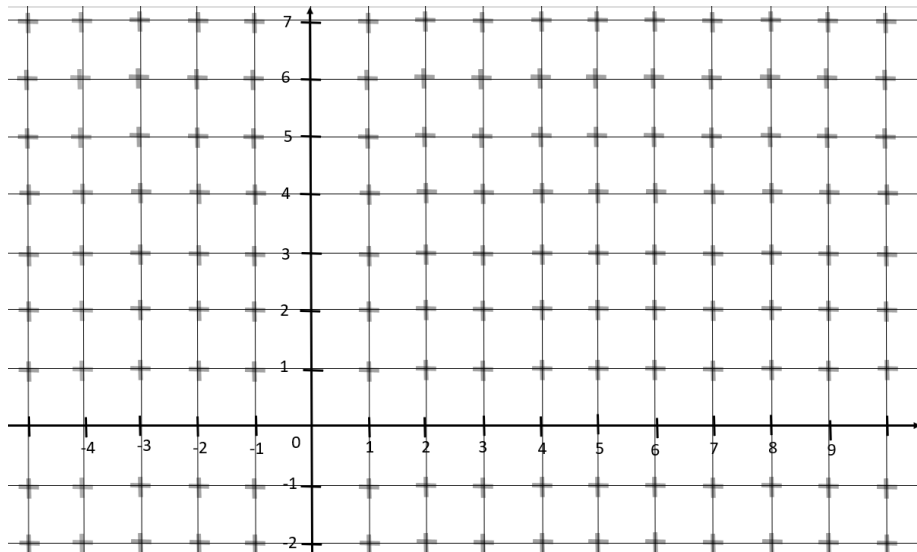
[Das Bogenmaß \(J1\)](#)

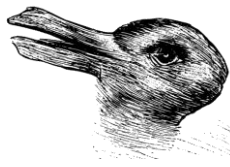
[Trigonometrische Gleichungen lösen](#)



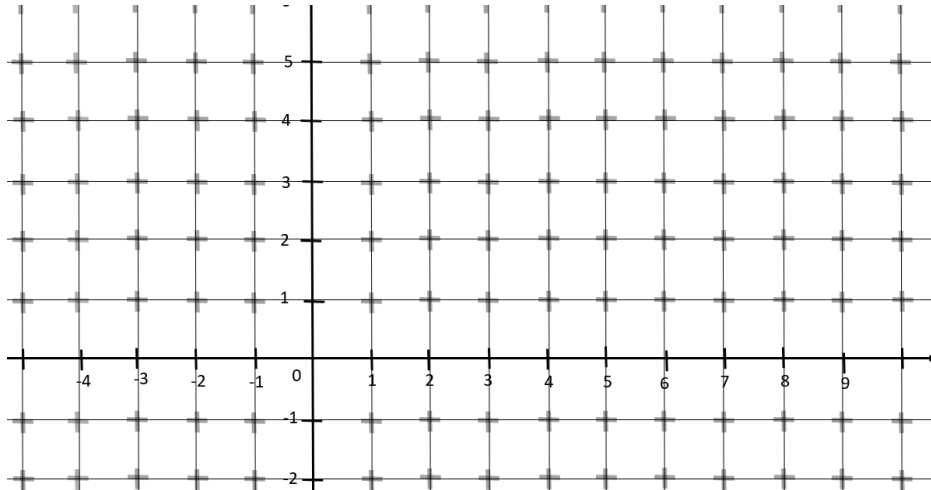
Finde alle Gitterpunkte $P(x|y)$ deren x - Koordinate größer gleich 1 und kleiner gleich 5 ist und deren y -Koordinate größer gleich 2 und kleiner gleich 4 ist.

Finde alle Gitterpunkte $P(x|y)$ deren y - Koordinate eine Quadratzahl ist.

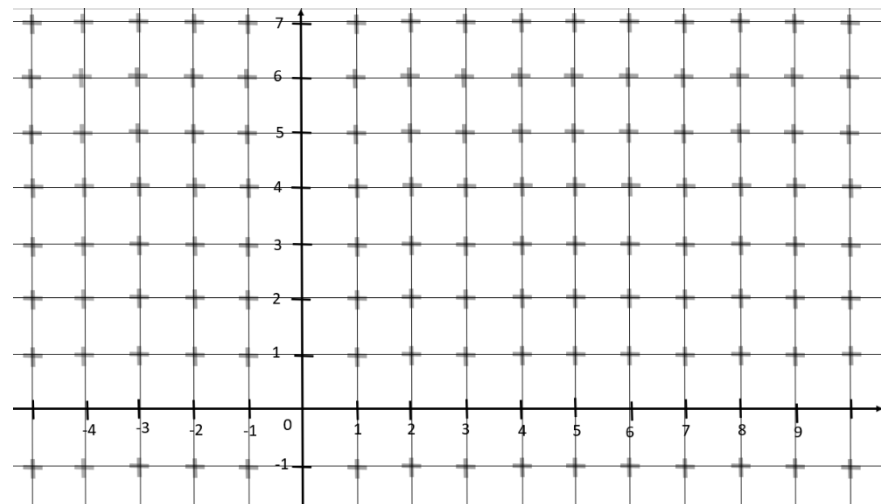




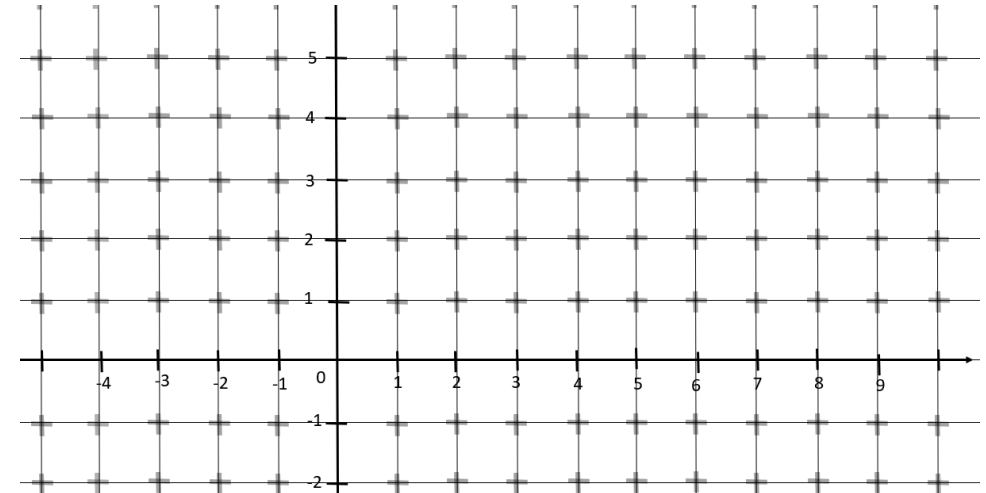
Finde alle Gitterpunkte $P(x|y)$ deren x - und y -Koordinaten gleich sind.



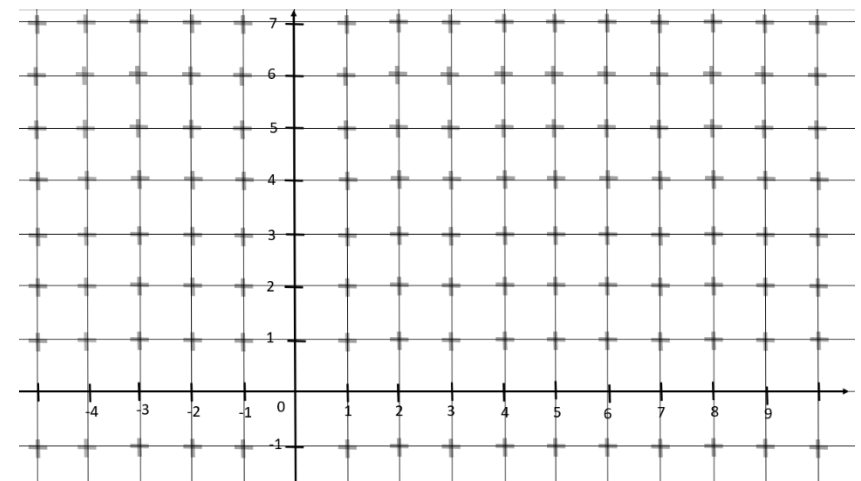
Finde alle Gitterpunkte $P(x|y)$ deren y -Koordinate man so berechnen kann, wenn man die x -Koordinate kennt: $y=x^2$

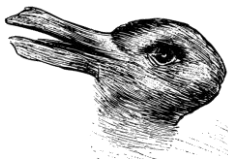


Ordne jedem x -Wert einen y -Wert zu. Der y -Wert soll gleich dem x -Wert sein.

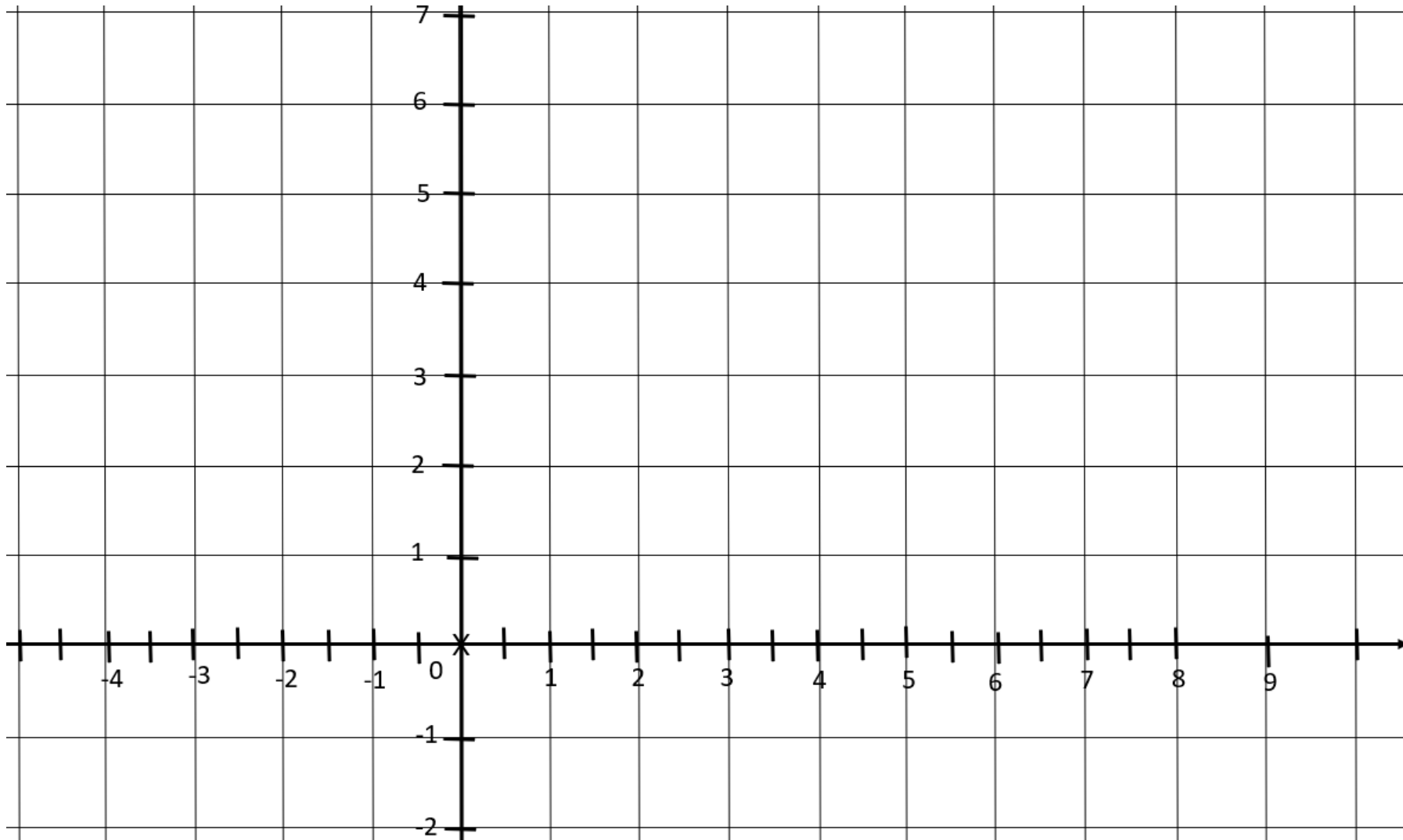


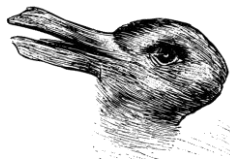
Ordne jedem x -Wert einen y -Wert zu. Der y -Wert soll sich aus der Vorschrift $y=x^2$ ergeben.



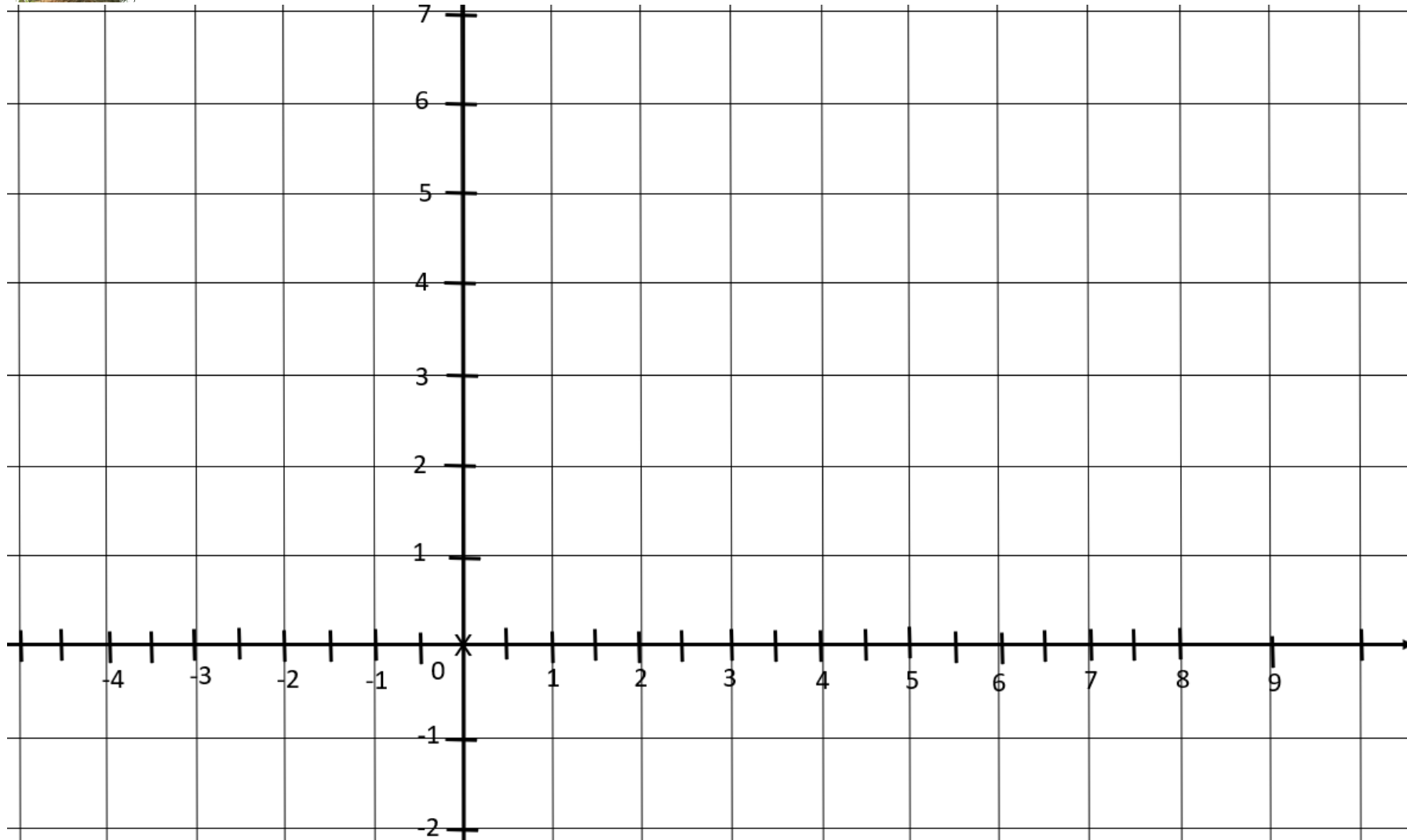


Ordne auch hier jedem x-Wert einen y-Wert zu. Der y-Wert soll sich aus der Vorschrift $y=x^2$ ergeben.





Ordne hier **jedem reellen x-Wert** einen y-Wert zu. Der y-Wert soll sich aus der Vorschrift $y=x^2$ ergeben.



Von der Sekante zur Tangente Herleitung der Ableitungsfunktion am Beispiel einer Parabel

Eine Gerade, die durch zwei Punkte einer Funktion verläuft heißt Sekante.

Seien $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ diese Punkte, dann berechnet man die Steigung dieser Geraden mit Hilfe der

Zwei-Punkte-Form (ZPF) nach der Formel

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$

Im Beispiel sei die Funktion gegeben durch $f(x) = \frac{1}{2}x^2$. Die Punkte $P_1(1|0,5)$ und $P_2(2|2)$. Um von P_1 zu P_2 zu gelangen, benötigt man auf der x-Achse einen Schritt der **Schrittweite 1**.

Wir werden nun diese Schrittweite systematisch verkleinern. Wenn der Abstand beider Punkte gegen Null geht, wird aus der Sekante eine Tangente.

Schrittweite 1:

$P_1(1|0,5)$, $P_2(2|2)$ ergibt die Sekantensteigung:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\quad - \quad}{\quad - \quad} = \quad = m$$

Schrittweite 0,5:

$P_1(1|0,5)$, $P_2(1,5| \quad)$ ergibt die Sekantensteigung:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\quad - \quad}{\quad - \quad} = \quad = m$$

Schrittweite 0,25:

$P_1(1|0,5)$, $P_2(1,25| \quad)$ ergibt die Sekantensteigung:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\boxed{} - \boxed{}}{\boxed{} - \boxed{}} = \boxed{} = m$$

Schrittweite h:

$P_1(1|0,5)$, $P_2(1+h|(1+)^2)$ ergibt die Sekantensteigung:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} =$$

Wanderweg: $f(x) = -0,25x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 4x = -\frac{1}{4}x(x-2)^2(x-4)$

Berechnen Sie:

$f(0,5) =$

$f(1) =$

$f(1,5) =$

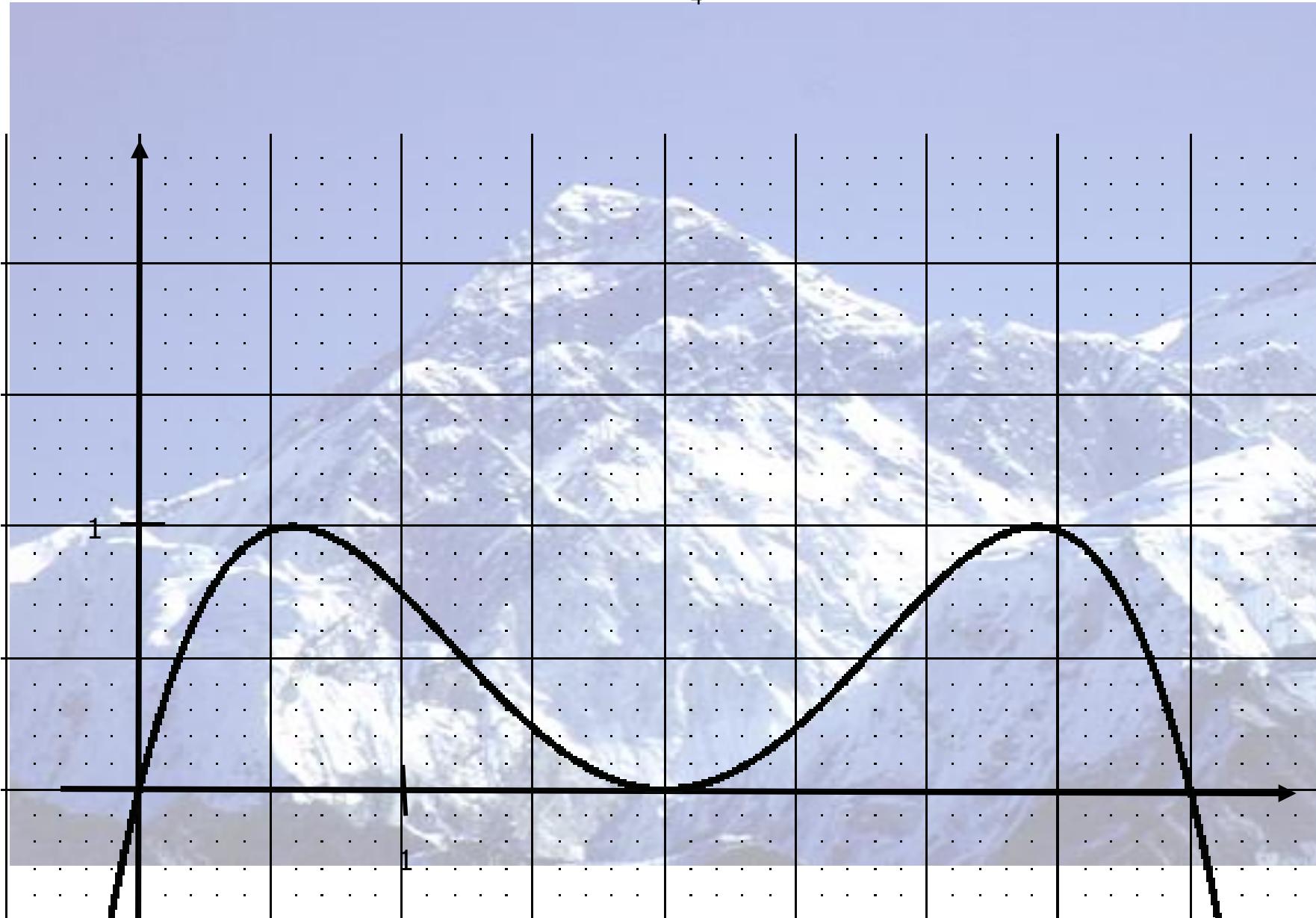
$f(2) =$

$f(2,5) =$

$f(3) =$

$f(3,5) =$

$f(4) =$



Messen und berechnen Sie hier die Steigungen der Tangenten an obiges Schaubild an den gegebenen

Tangente an der Stelle 2,5: Steigung:

Tangente an der Stelle 1: Steigung

Tangente an der Stelle 3: Steigung.....

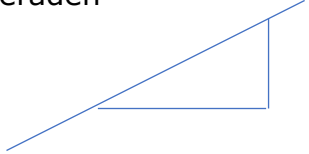
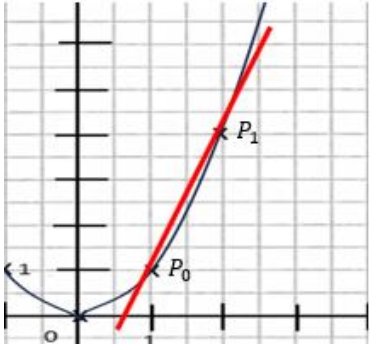
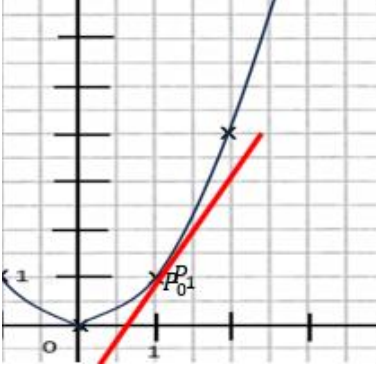
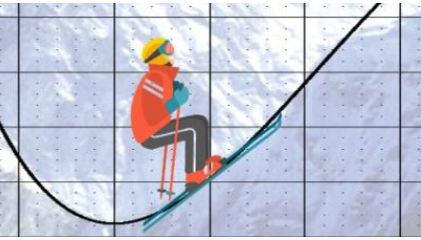
Tangente an der Stelle 1,5: Steigung:.....

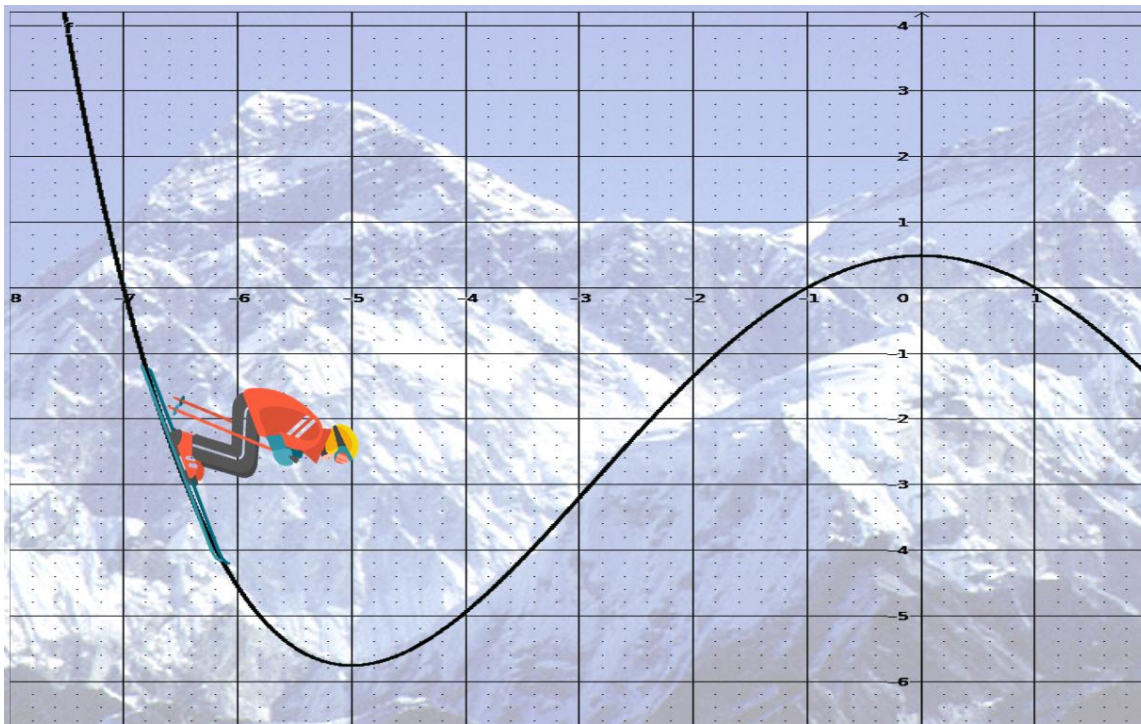
Tangente an der Stelle 3,5: Steigung:.....

Tangente an der Stelle 2: Steigung.....

Tangente an der Stelle 0,5: Steigung:.....

Tangente an der Stelle 0: Steigung ...

Eine Gerade ist eindeutig festgelegt, wenn man zwei Punkte kennt, die auf der Geraden liegen. Daher gibt es die ZPF Zwei-Punkte-Formel zum Berechnen der Geradengleichung	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	Differenzenquotient $\frac{\text{Differenz der } y - \text{Koordinaten}}{\text{Differenz der } x - \text{Koordinaten}}$	entspricht dem Tangens des Winkels und heißt Steigung der Geraden 
Eine Gerade g, die das Schaubild einer Funktion f schneidet, heißt Sekante		Die Koordinaten von $P_0(x_0 y_0)$ und $P_1(x_1 y_1)$ haben jetzt eine Schrittweite: $x_1 - x_0$. Weil die Punkte auf der Funktion liegen, berechnet man die y-Koordinaten mit der Funktionsgleichung von f: $P_0(x_0 f(x_0))$ und $P_1(x_1 f(x_1))$	
Eine Gerade g, die das Schaubild in einem Punkt berührt, heißt Tangente	$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - y_0}{x_0 + h - x_0}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - y_0}{h}$	Der Trick: Wir geben eine Schrittweite h an zwischen P_1 und P_2 , die infinitesimal klein werden kann. $P_0(x_0 f(x_0))$ und $P_1(x_0+h f(x_0+h))$	
Die Steigung der Tangente macht eine Aussage über den Verlauf des Schaubilds (steigt, fällt, wie stark?, oder bleibt gleich)		Die Steigung der Tangente an das Schaubild an der Stelle x_0 heißt Ableitung von f an der Stelle x_0 .	



Wähle aus den Begriffen: Definitionsmenge, Wertemenge, Schaubild, Steigung, Differenzenquotienten, Differenzieren

Eine Funktion f ordnet jedem x -Wert aus der genau einen y -Wert aus der zu. Das kann man durch ein visualisieren. Wenn man dieses Schaubild anschaut, könnte

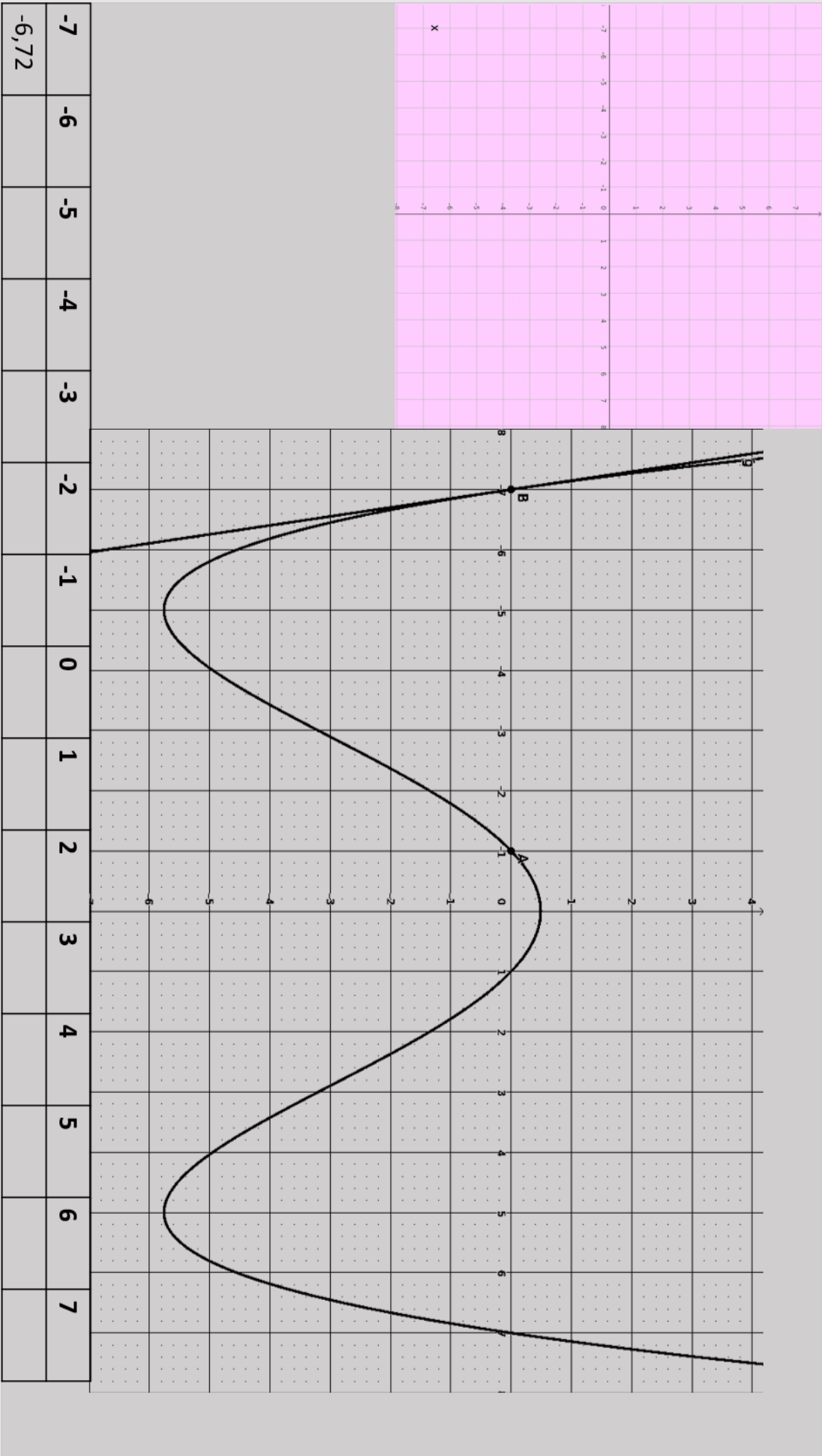
interessieren, wie steil die

an jeder Stelle ist, also die Tangentensteigung. Dabei benutzt man gerne das Bild eines Skifahrers. Der Ski symbolisiert dabei die Tangente an das Schaubild, während alle Stellen x aus der Definitionsmenge "durchfahren" werden.

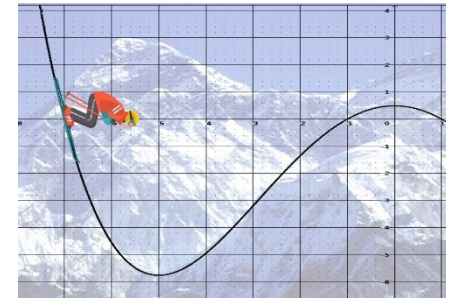
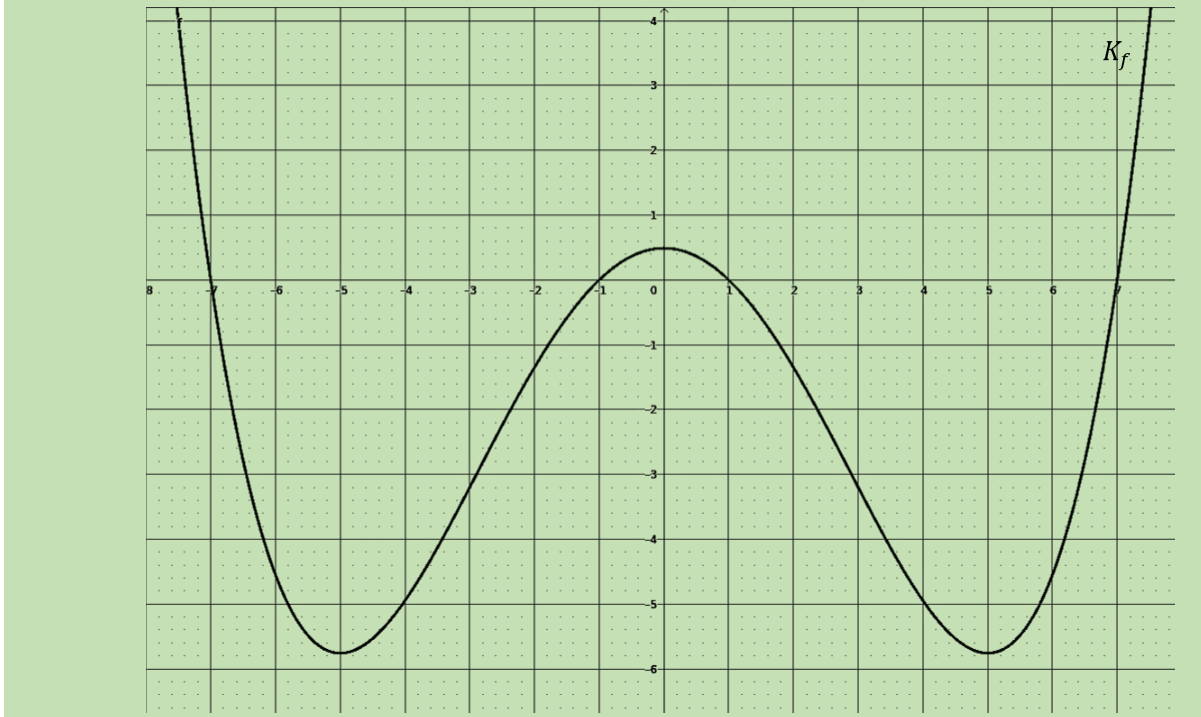
Geometrisch könnte man nun das Steigungsdreieck einzeichnen und mit dem die Steigung (den Tangens des Winkels gegenüber der Horizontalen) bestimmen. Man nennt das manuelles (manuelles Ableiten).

Will man nun die über den Verlauf des gesamten „Skifahrerweges“ anschauen und notieren, dann kann man das wieder über eine Funktion tun:

Die Funktion $f'(x)$ ordnet jeder reellen Zahl auf der x -Achse eine reelle Zahl und auch eine Information über K_f zu. Zu jeder x -Koordinate von f' ist die y -Koordinate von f' die Steigung der Tangente an der Stelle x an das Schaubild von K_f .



$$f(x) = \frac{1}{100}(x-1)(x+1)(x-7)(x+7)$$

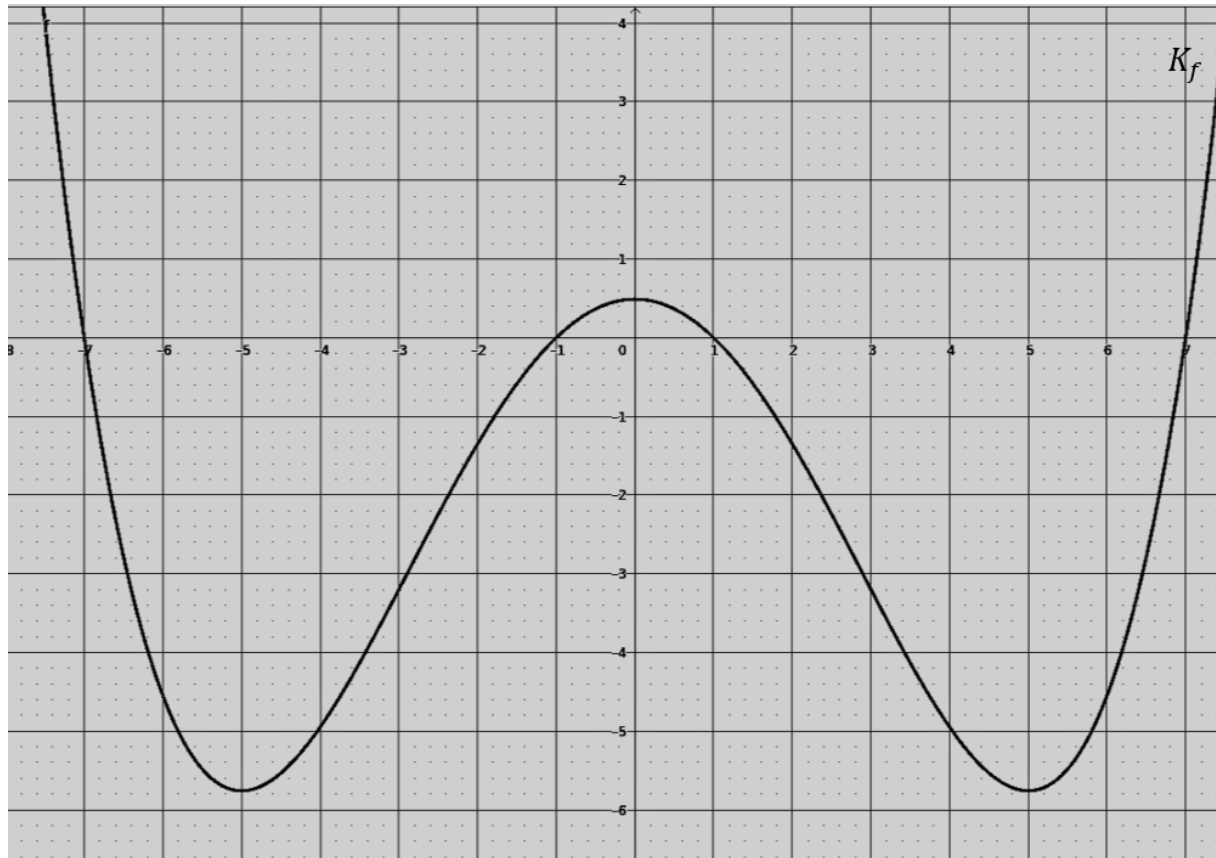


Füllen Sie mit dem WTR die Wertetabelle aus und zeichnen Sie einige Tangenten ein an beliebig ausgewählten Stellen.

(mode3 dann $f(x)=$ eingeben dann „=" dann Startwert dann „=" dann Endwert dann „=" dann Schrittweite dann „=")

$$f(x) = \frac{1}{100}(x-1)(x+1)(x-7)(x+7) = \frac{1}{100}(x^2-1)(x^2-49) = \frac{1}{100}(x^4-50x^2+49)$$

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
f(x)															



Es ist $f(x) = \frac{1}{100}(x^4 - 50x^2 + 49)$ Füllen Sie die Wertetabelle aus und zeichnen Sie zusätzlich das Schaubild von f' in dasselbe Koordinatensystem ein.

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
f'(x)															

Gegeben sei $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x$

1) Zeichnen Sie das Schaubild in ein rechtwinkliges KS.

Hinweis: Wertetabelle

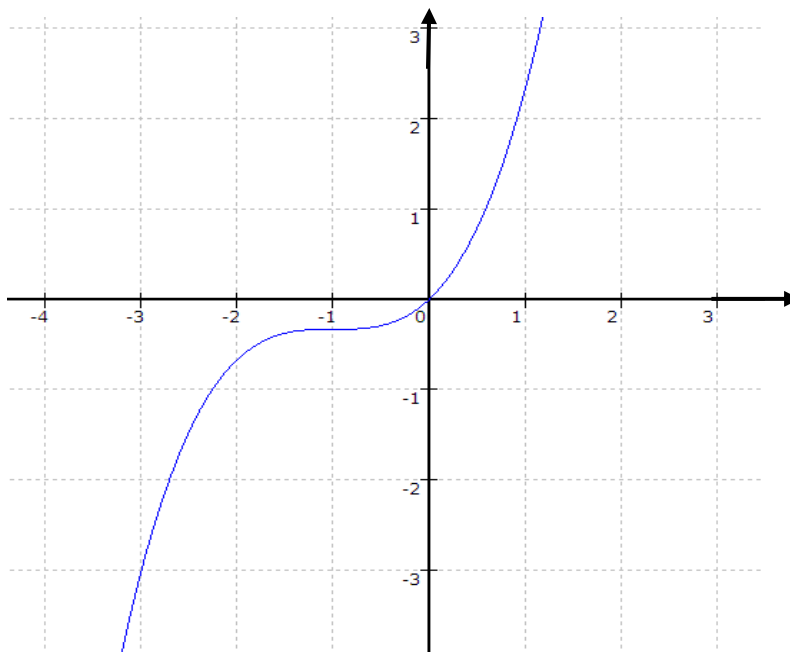
x	-2	-1	0	0,5	1
$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x$	-0,6	-0,3	0	0,8	2,3

2) Bestimmen Sie die Tangentensteigung an der Stelle x_0 .

3) Bestimmen Sie die Tangentensteigung an der Stelle -1.

4) Bestimmen Sie die Tangentensteigung an der Stelle 0.

5) Bestimmen Sie die Tangentensteigung an der Stelle 1.



6) Zeichnen Sie die Tangenten an das Schaubild.

Definition der Ableitungsfunktion: Die Funktion, die jedem x-Wert die Tangentensteigung der Tangente an der Stelle x an das Schaubild von $f(x)$ zuordnet, nennt man die **Ableitungsfunktion** $f'(x)$.

Zeichne das Schaubild der Funktion $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x^2(x-2)$, achte dabei bitte die exakten Werte an den Nullstellen. Nimm die Wertetabelle zu Hilfe.

x	0,5	1	1,5	2
f(x)				

An welchen Stellen besitzt das Schaubild waagrechte Tangenten?

Lösung:

An den Stellen $x_1 = \dots\dots\dots$ und $x_2 = \dots\dots\dots$ (von links nach rechts)

Berechne die Ableitung von f
Berechne die Nullstellen von $f'(x)$.

Vervollständige den Merksatz:

Merke: Stellen mitTangente sind dieder Ableitung. Das Schaubild von $f(x)$ kann dort einen Hochpunkt oder einen Tiefpunkt haben.

Vervollständige den Merksatz:

Merke: Für $0,67 < x < 2$ ist die Funktion $f(x)$ Dort ist die Ableitungsfunktion $f'(x)$ als Null..

Vervollständige den Merksatz:

Merke: Für $0,67 < x$ und für $x > 2$ ist die Funktion $f(x)$ Dort ist die Ableitungsfunktion $f'(x)$

Ein wichtiger Begriff:

Äquivalent $\Leftrightarrow$:

Zwei Aussagen A und B sind gleichwertig (äquivalent), genau dann, wenn gilt: aus A folgt B und aus B folgt A.



Beispiel:

1) A: ein Kind hat eine Körpertemperatur von 39°C . B: Das Kind hat Fieber.

$A \Rightarrow B$ aber $B \not\Rightarrow A$ ($\Rightarrow$ bedeutet: "daraus folgt")

2) A: Ich wohne in Baden-Württemberg B: Ich wohne in Karlsruhe

$A \not\Rightarrow B$ aber $B \Rightarrow A$

3) A: ein Kind hat eine Körpertemperatur von über $37,5^{\circ}$. B: Das Kind hat Fieber.

$A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ d.h. $A \Leftrightarrow B$

Betrachten Sie die folgende Funktion $f(x)$ an den Stellen mit waagrechter Tangente. Welche Aussagen sind für dieses Beispiel richtig:

An der Stelle x_0 ist ein Extrempunkt oder Sattelpunkt.

	richtig	falsch
$\Rightarrow$		
$\Leftarrow$		
$\Leftrightarrow$		

Die Ableitung $f'(x_0) = 0$.

An der Stelle x_0 ist ein Extrempunkt.

	richtig	falsch
$\Rightarrow$		
$\Leftarrow$		
$\Leftrightarrow$		

Die Ableitung $f'(x_0) = 0$.

An der Stelle x_0 ist ein Extrempunkt.

	richtig	falsch
$\Rightarrow$		
$\Leftarrow$		
$\Leftrightarrow$		

Die Ableitung $f'(x_0) = 0$.
und der Wert von f wechselt dort das Vorzeichen.

An der Stelle x_0 ist ein Hochpunkt.

	richtig	falsch
$\Rightarrow$		
$\Leftarrow$		
$\Leftrightarrow$	x	

Die Ableitung $f'(x_0) = 0$.
und f' ist

☐ vorher positiv und nachher negativ.

☐ vorher negativ und nachher positiv.

An der Stelle x_0 ist ein Tiefpunkt.

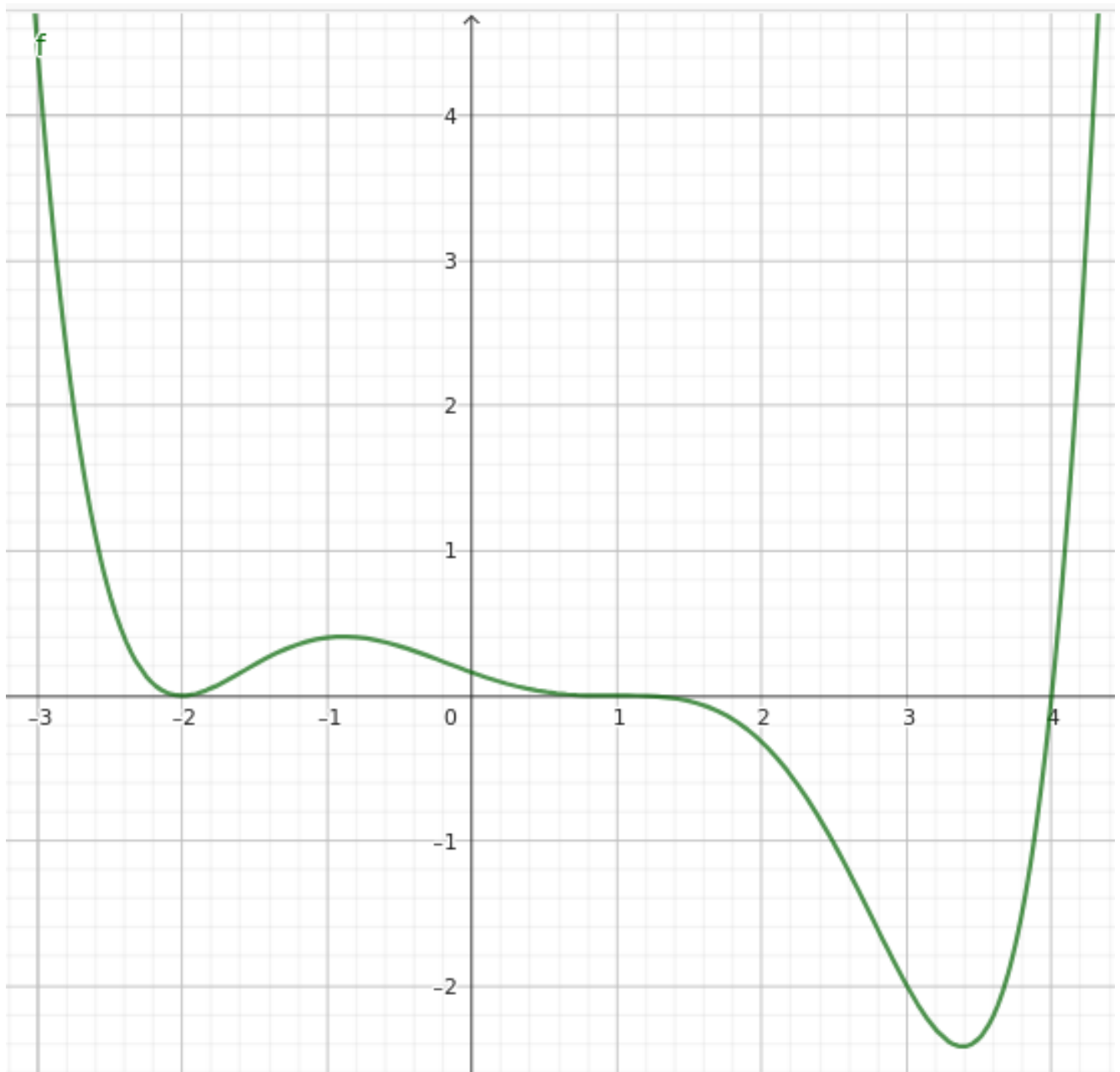
	richtig	falsch
$\Rightarrow$		
$\Leftarrow$		
$\Leftrightarrow$	x	

Die Ableitung $f'(x_0) = 0$.
und f' ist

☐ vorher positiv und
nachher negativ.

☐ vorher negativ und
nachher positiv.

Schaubild K_f von f mit $f(x) = 0,01(x + 2)^2(x - 1)^3(x - 4)$



Potenzregel und Summenregel

a)	$f(x) = a \cdot x^n$
b)	$f(x) = 5x^3 + \frac{1}{8}x^4 - 2x$
c)	$f(x) = x^{99} - \frac{1}{\sqrt{2}}x^2 + 33$
d)	$f(x) = \frac{1}{6}x^{18} - \frac{1}{9}x^9 + 5x^2$
e)	$f(x) = \frac{1}{5}x^{25} + \frac{1}{7}x^7 + 7$
f)	$f(x) = 5x^3 + 3x^3 - \frac{1}{11}x^{121}$
g)	$f(x) = x^{-3} - x^{-5} + \frac{1}{3}x^{-9}$
h)	$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 17$
i)	$f(x) = -\frac{1}{6}x^{-6} + \frac{1}{x^8}$
j)	$f(x) = \frac{5}{x^5} + \frac{1}{x}$
k)	$f(x) = -\frac{1}{5}x^{-5} + x^{-5} + \frac{1}{x}3 - \frac{1}{x}$
l)	$f(x) = \sqrt{x} + 3x$
m)	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^3} - x^{-5}$
n)	$f(x) = x^{\frac{5}{3}} - \sqrt[3]{x} + 3x^{\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{x}$
o)	$f(x) = \sqrt{x} - (\sqrt{x})^5 + \frac{1}{\sqrt{x}}$
p)	$f(x) = \sqrt[7]{x} - \frac{1}{x^5} + 121$
q)	$f(x) = 2x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \sqrt[11]{x} - 9$
r)	$f(x) = -3\sqrt[3]{x} + 33x^{\frac{1}{9}}$

s)	$f(x) = 2x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[7]{x}$
t)	$f(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 15$

Sin(x) und cos (x) und e^x ableiten

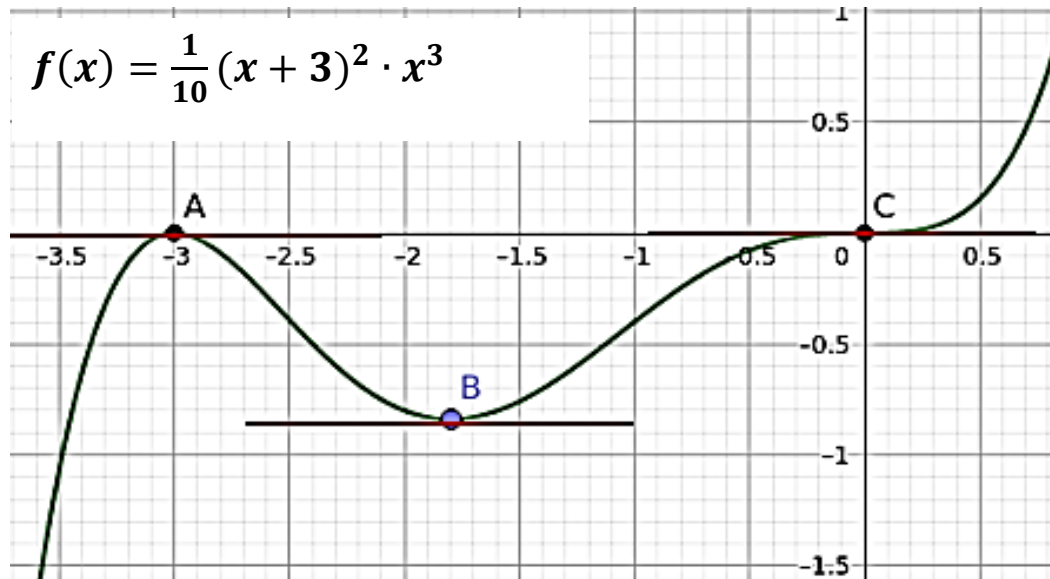
a)	$f(x) = \sin(x) + \cos(x) + e^x$
b)	$f(x) = -e^x - \sin(x)$
c)	$f(x) = 3e^x - \cos(x)$
d)	$f(x) = -\sin(x) - \cos(x) - e^x$
e)	$f(x) = 15e^x + \frac{1}{x^2} + 19 \cos(x)$

Produktregel

a)	$f(x) = (2x^2 - x) \cdot (x^5 + 1)$
b)	$f(x) = \left(1 - \frac{1}{3}x^3\right)\left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{9}x^9\right)$
c)	$f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$
d)	$f(x) = (2x + 4)(2x - 4)$
e)	$f(x) = \left(\frac{1}{5}x^{10} - x^3\right)\left(\frac{1}{5}x^{10} - x^3\right)$
f)	$f(x) = \sqrt[7]{x}(3x^3 - x^2)$
g)	$f(x) = x^{-1}(e^x + 7)$
h)	$f(x) = \frac{1}{x^2} \cos(x)$
i)	$f(x) = e^x(18x + \sqrt{2})$
j)	$f(x) = (e^x - 1)(3e^x + \cos(x))$

Kettenregel

a)	$f(x) = e^{3x+7} - 1$
b)	$f(x) = \cos\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right)$
c)	$f(x) = \sqrt{(6x+9)}^2$
d)	$f(x) = \sin(3x) - \cos\left(5x - \frac{1}{3}\right)$
e)	$f(x) = 5\cos(2x - 9)$
f)	$f(x) = (3x^2 - 1)^5$
g)	$f(x) = \sin\left(\frac{1}{3}x - 7\right)$
h)	$f(x) = e^{\frac{1}{5}x-19}$
i)	$f(x) = \sin(3x - 5) + \cos(5x - 3)$
j)	$f(x) = -\sin(-x - 1) + \cos\left(\frac{1}{3}x^6\right) + 3e^{\frac{1}{3}x-1}$



Untersuchen Sie die Steigungen der Tangenten jeweils kurz vor und kurz nach den Punkten (A,B und C):

Stelle	Tangentensteigung vor der Stelle (<0 oder >0 ?)	Tangentensteigung nach der Stelle (<0 oder >0 ?)	Hochpunkt oder Tiefpunkt oder keine Extremstelle (Sattelpunkt)?
$x=-3$			
$x=-1,8$			
$x=0$			

Formulieren Sie einen Merksatz:

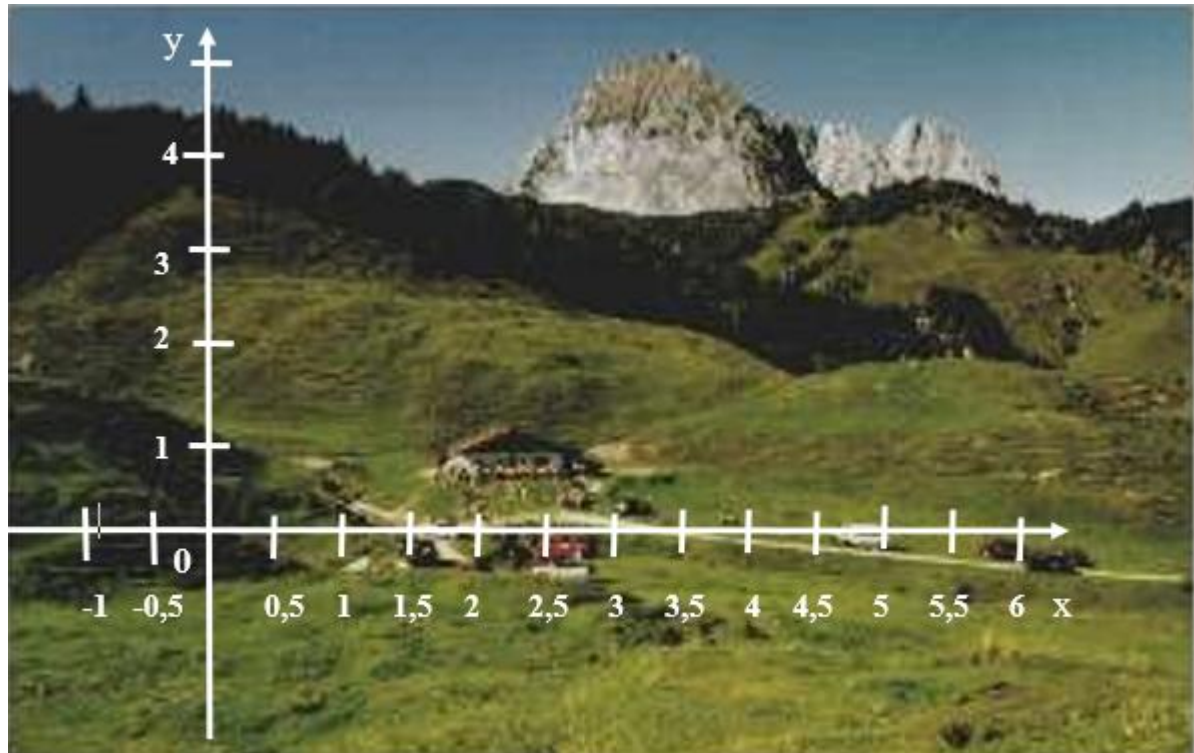
An der Stelle x_0 ist ein **Hochpunkt**, genau dann wenn.....

An der Stelle x_0 ist ein **Tiefpunkt**, genau dann wenn.....

Wanderweg: $f(x) = -\frac{1}{20}x^4 + \frac{2}{5}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{5}x + 1 = -\frac{1}{20}(x-2)^2(x+1)(x-5)$

Wertetabelle mit WTR

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
f(x)													



1. Stellen Sie sich vor, Sie gingen als Wanderer das Schaubild entlang (Start bei 0). In welche Bereiche könnte man den Verlauf des Schaubildes einteilen? Tragen Sie in die **zweite Spalte** der Tabelle Anfang und Ende dieser Bereiche ein, indem Sie die jeweiligen Stellen auf der x-Achse angeben.
2. Nehmen Sie die beiliegende **Wander-Figur** und setzen Sie sie nacheinander in jedem der von Ihnen eingeteilten Bereiche auf das Schaubild. Beide Füße sollen das Schaubild berühren. Nennen Sie diese Punkte P_1 (erster Fuß) und P_2 (zweiter Fuß), und lesen Sie die **ungefähren** Koordinaten dieser Punkte ab.

Bereich 1	von x = 0 bis x =	P_1 ()	P_2 ()
Bereich 2	von x = bis x =	P_1 ()	P_2 ()
Bereich 3	von x = bis x =	P_1 ()	P_2 ()

Füllen Sie die Tabelle aus:

Spalte 1: Beschreiben Sie den Verlauf des Schaubilds in Alltagssprache in Ihren eigenen Worten.

Spalte 2: Schauen Sie sich die Tabelle auf dem ersten Blatt noch einmal an. Welche Bedingungen gelten in den einzelnen Bereichen? Versuchen Sie sie zu formulieren.

Spalte 3: Füllen wir anschließend gemeinsam aus. Lassen Sie sie erst einmal frei.

	Beschreibung in Alltagssprache	Mathematische Kriterien	Beschreibung in Fachsprache
Bereich 1 von $x =$ bis $x =$			
Bereich 2 von $x =$ bis $x =$			
Bereich 3 von $x = 1$ bis $x =$			

Monotonie

Eine Kurve heißt **streng monoton wachsend**, wenn aus $x_1 < x_2$ folgt: $f(x_1) < f(x_2)$.

Eine Kurve heißt **streng monoton fallend**, wenn aus $x_1 < x_2$ folgt: $f(x_1) > f(x_2)$.

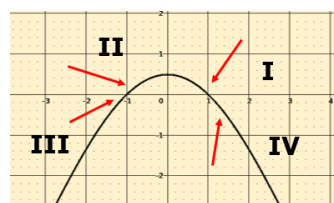
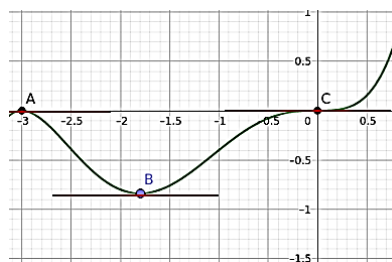
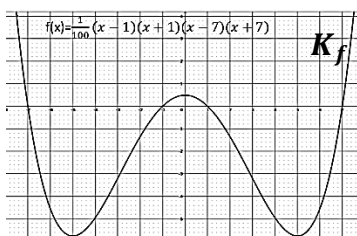
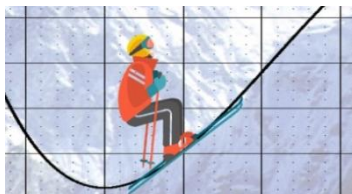
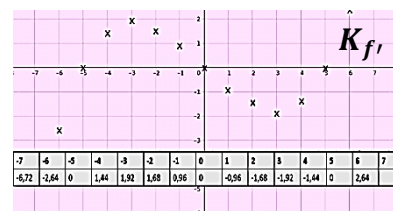
Aufgabe:

Gegeben sei die Funktion $f(x) = (x+2)(x-2) x^2 = x^4 - 4x^2$.

Zeichnen Sie das zugehörige Schaubild in ein Koordinatensystem und untersuchen Sie es auf Bereiche von strenger Monotonie.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)							

Vision oder Werkzeug oder genau hinschauen? ↓	Funktionen und Schaubilder modellieren in der Physik das Verhalten von Objekten in der Realität.	
	Im Matheunterricht aber sind Funktionen eine Abbildung (Zuordnung) von der Definitionsmenge (x-Achse) in die Wertemenge (y- Achse).	Bild zum nebenstehenden Text ↓
	Die Ableitungsfunktion f' von f ist auch eine Zuordnung. Sie ordnet jedem x-Wert die zugehörige Tangentensteigung an das Schaubild von f zu.	
	Die wichtige Information in Form von der "Tangentensteigung" von f' hilft uns, den Verlauf des Schaubilds K_f zu beschreiben.	
	An einem Hoch oder Tiefpunkt ist die Tangente immer waagerecht, aber nicht bei jeder waagerechten Tangente ist ein Hoch- oder Tiefpunkt.	
	Eine einfache Nullstelle (egal ob von f oder f') bedeutet immer auch, dass die Funktionswerte vor der Nullstelle ein anderes Vorzeichen haben als nach der Nullstelle. Es gibt einen Vorzeichenwechsel.	
	Bei der Kurvendiskussion muss man ...	
	... Satz vom Nullprodukt kennen	
	...Quadratische Gleichung lösen können (pq- Formel)	
	...ableiten können (Ableitungsregeln)	
	...die Begriffe Nullstelle, Hochpunkt und Tiefpunkt kennen	



Ein Produkt ist genau dann Null,
wenn einer seiner Faktoren Null ist

$$x^4 e^x + 5x^3 e^x = 0$$

$$x^3 \cdot e^x \cdot (x + 5) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad x = -5$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 3}$$

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{4}$$

$$x_{1,2} = -1 \pm 2$$

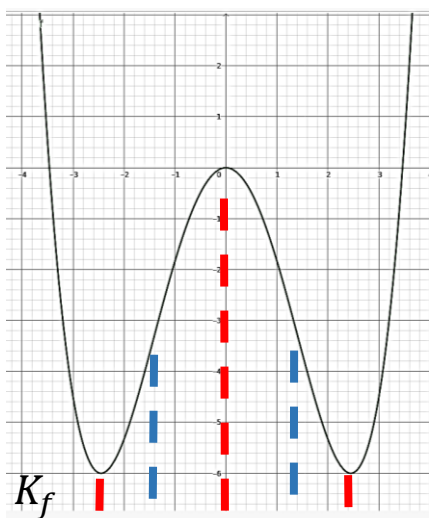
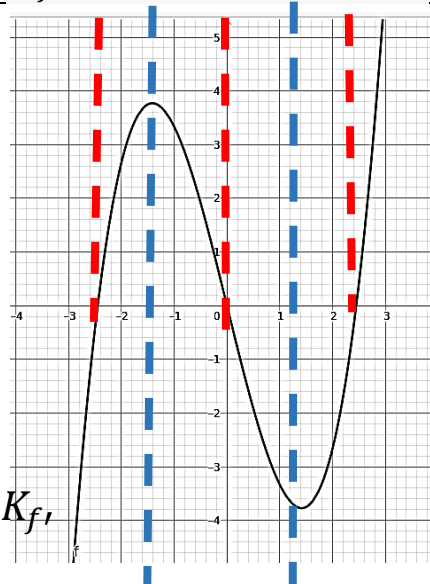
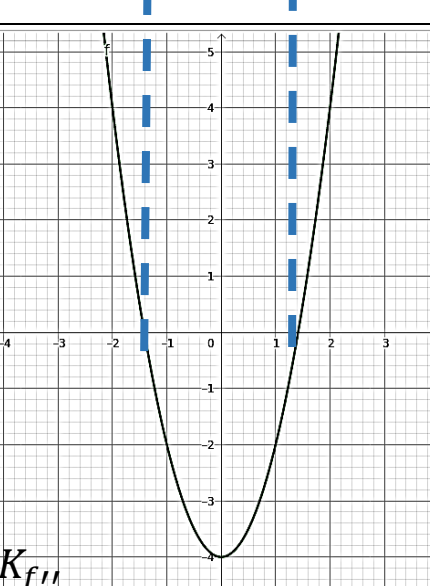
$$x_1 = 1 \quad x_2 = -3$$



$$f(x) = x^3 - \sin(x)$$

$$f'(x) = 3x^2 - \cos(x)$$

$$f''(x) = 6x + \sin(x)$$

$f(x) = \frac{1}{6}x^4 - 2x^2$	Hoch- und Tiefpunkte von K_f	Wendepunkte bzw. Krümmungsverhalten
	Tangente an der Stelle des Extrempunktes ist Tangenten vor der Stelle x_0 und danach $\Rightarrow$ Hochpunkt Tangenten fallen vor der Stelle x_0 und steigen danach $\Rightarrow$	Tangentensteigungen werden kleiner $\Rightarrow$ Tangentensteigungen werden $\Rightarrow$ Linkskurve Tangentensteigungen werden größer bis zur Stelle x_0 und danach wieder kleiner $\Rightarrow$ Wendepunkt an der Stelle x_0 Tangentensteigungen werden kleiner bis zur Stelle x_0 und danach wieder größer $\Rightarrow$ Wendepunkt an der Stelle x_0
	a) VZW von f' an der Stelle x_0 b) $f'(x_0) = 0$ Bemerkungen: bei Polynomfunktionen gilt 1) VZW von $f' \Leftrightarrow$ Extremstelle (mit $f'(x) = 0$ wissen wir, wo Kandidaten für Extremstellen sind) 2) a) $\Rightarrow$ Die Tangente an K_f, steigt (bei VZW von nach) und fällt (bei VZW von nach)	$f(x)$ streng monoton fallend $\Rightarrow$ $f(x)$ streng monoton $\Rightarrow$ Linkskurve Hochpunkt oder Tiefpunkt von K_f an der Stelle $x_0 \Leftrightarrow$ an der Stelle x_0
	$f''(x_0) > 0$ und $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow$ an der Stelle x_0 $f''(x_0) < 0$ und $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow$ Hochpunkt von K_f an der Stelle x_0	$f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0 \Leftrightarrow$ von K_f an der Stelle x_0

*Anmerkung: kleiner und größer meint hier den Betrag der Steigung, nicht ob sie negativ oder positiv ist.

1)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$.

Fülle die Wertetabelle aus und zeichne K_f in ein rechtwinkliges Koordinatensystem.

x	-2,5	-1	0	1	2	2,5
f(x)						

2)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$. Begründe rechnerisch, ob $f(x)$ einen Hoch- oder Tiefpunkt besitzt.

3)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$. Bestimme $f'''(x)$.

4)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$. Bestimme die Nullstellen von $f(x)$.

Bestimme die Extremstellen der Funktion rechnerisch:

Aufgabe 1

$$f(x) = \frac{1}{10}(x+3)^2x^3 = \frac{1}{10}x^5 + \frac{3}{5}x^4 + \frac{9}{10}x^3$$

Aufgabe 2

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$$

Aufgabe 3

$$f(x) = e^x - ex - 2$$

Aufgabe 4

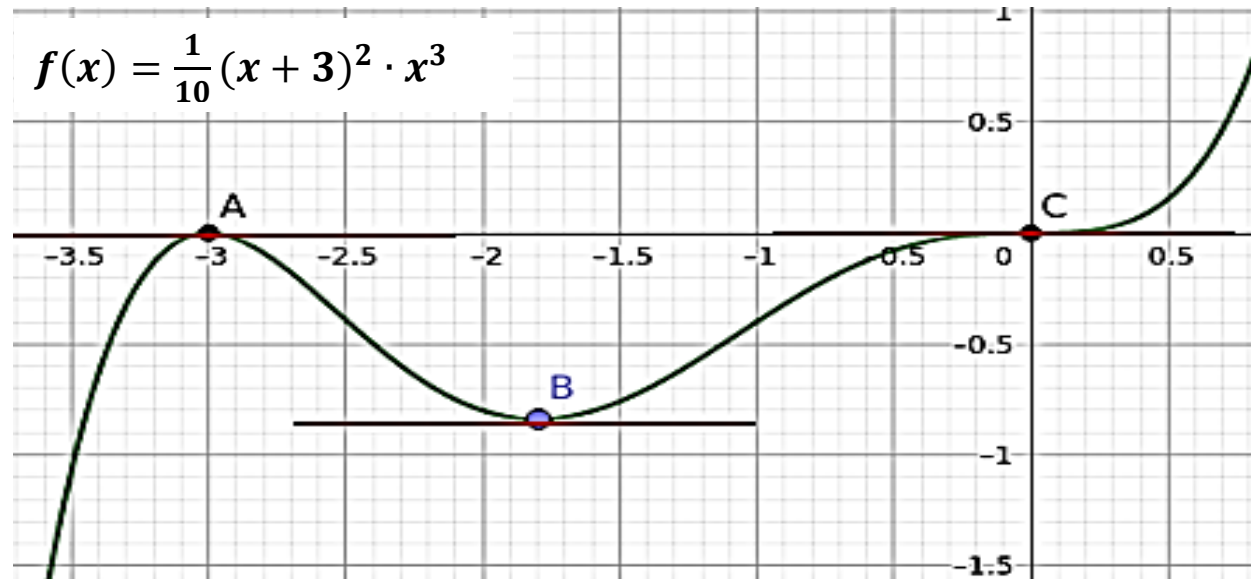
Die Funktion besitzt unter anderem an den Stellen $x=6$ und $x=-6$ eine Extremstelle. Berechne den Hoch- bzw. Tiefpunkt an diesen beiden Stellen.

$$f(x) = x \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) - x$$

Aufgabe 5

Die Funktion besitzt unter anderem an den Stellen $x=6$ und $x=-6$ eine Extremstelle. Berechne den Hoch- bzw. Tiefpunkt an diesen beiden Stellen.

$$f(x) = \sin(\pi x)$$



Untersuchen Sie die Steigungen der Tangenten jeweils kurz vor und kurz nach den Punkten (A,B und C):

Stelle	Tangentensteigung vor der Stelle (<0 oder >0 ?)	Tangentensteigung nach der Stelle (<0 oder >0 ?)	Hochpunkt oder Tiefpunkt oder keine Extremstelle (Sattelpunkt)?
$x=-3$	☐ <0 ☐ >0	☐ <0 ☐ >0	☐ Sattelpunkt ☐ Tiefpunkt ☐ Hochpunkt
$x=-1,8$	☐ <0 ☐ >0	☐ <0 ☐ >0	☐ Sattelpunkt ☐ Tiefpunkt ☐ Hochpunkt
$x=0$	☐ <0 ☐ >0	☐ <0 ☐ >0	☐ Sattelpunkt ☐ Tiefpunkt ☐ Hochpunkt

Formulieren Sie einen Merksatz:

An der Stelle x_0 ist ein Hochpunkt, genau dann wenn

An der Stelle x_0 ist ein Tiefpunkt, genau dann wenn

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

Berechne $f'(x)$ und $f''(x)$

Zeichne die Schaubilder von f und f' und f'' in verschiedene Koordinatensysteme untereinander in Dein Heft.

Betrachte die Lösung zu Frage 2 und vervollständige die Tabelle. (Aber: nicht alle Fragen lassen sich allein durch Betrachten dieser Schaubilder beantworten)

Tangentensteigung	Schaubild
bleibt ständig positiv	
bleibt ständig negativ	
$f'(x) = 0$ und f' hat VZW(=Vorzeichenwechsel) von - nach +	
$f'(x) = 0$ und f' hat VZW(=Vorzeichenwechsel) von + nach -	
f' erreicht ein Minimum, d.h. nimmt ab und dann wieder zu	
f' erreicht ein Maximum, d.h. nimmt zu und dann wieder ab	

Wähle zwischen den Begriffen:

streng monoton wachsend

streng monoton fallend

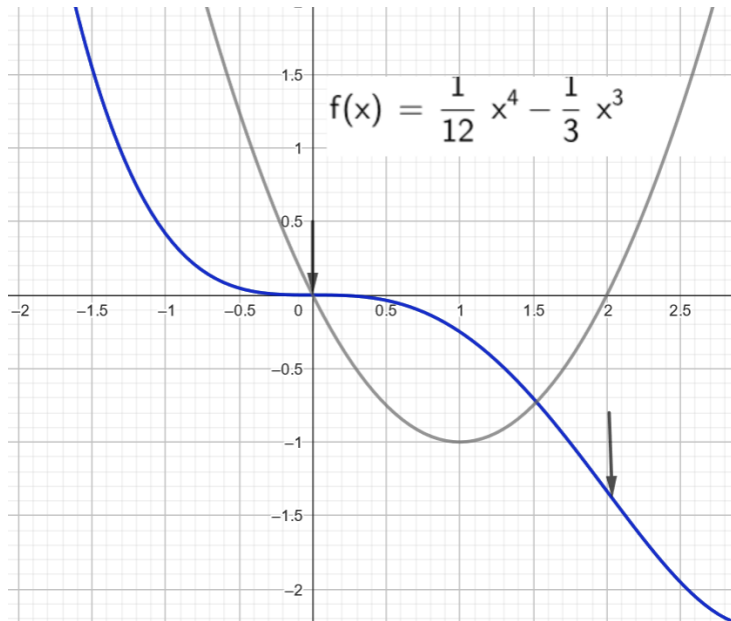
wechselt von einer Rechts- zu einer Linkskurve

wechselt von einer Links-zur Rechtskurve

hat einen Hochpunkt

hat einen Tiefpunkt

Aufgabe 1

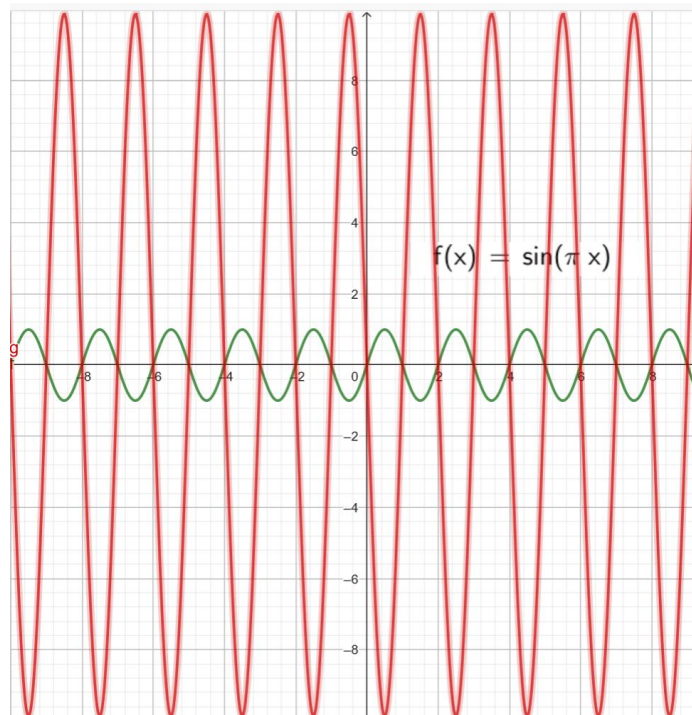


Die Funktion f besitzt Wendestellen bei $x=0$ und $x=2$

Begründe durch den Vorzeichenwechsel von f'' , ob es sich um einen Wechsel des Krümmungsverhaltens von einer Rechtskurve in eine Linkskurve oder um einen Wechsel von einer Linkskurve zu einer Rechtskurve handelt.

Stelle	Krümmung vor der Stelle (Rechtskurve oder Linkskurve ?)	Tangentensteigung nach der Stelle (Rechtskurve oder Linkskurve ?)	
$x=0$	☐ Linkskurve ☐ Rechtskurve	☐ Rechtskurve ☐ Linkskurve	Änderung des Krümmungsverhaltens? , d.h. Wendepunkt vorhanden ja ☐ nein ☐
$x=-1,8$	☐ Linkskurve ☐ Rechtskurve	☐ Rechtskurve ☐ Linkskurve	Änderung des Krümmungsverhaltens? , d.h. Wendepunkt vorhanden ja ☐ nein ☐

Aufgabe 2

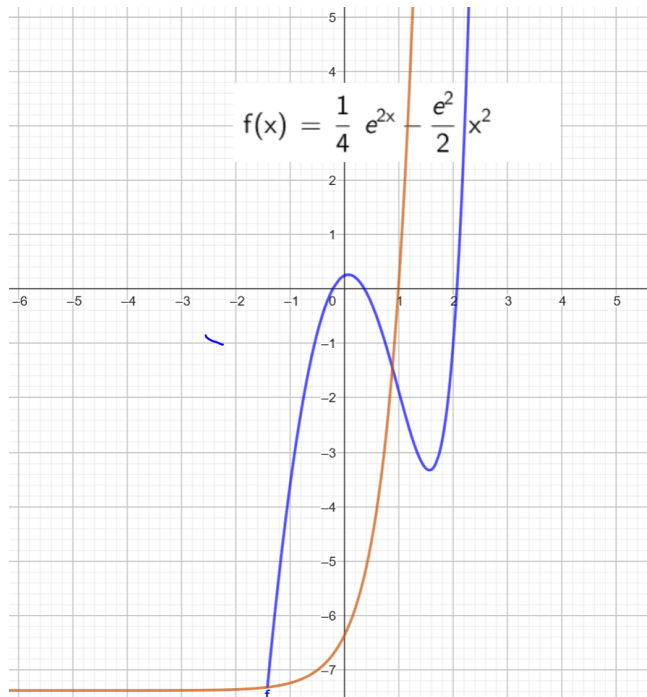


Die Funktion f besitzt Wendestellen unter anderen bei $x=1$ und $x=2$

Begründe durch den Vorzeichenwechsel von f'' , ob es sich um einen Wechsel des Krümmungsverhaltens von einer Rechtskurve in eine Linkskurve oder um einen Wechsel von einer Linkskurve zu einer Rechtskurve handelt.

Stelle	Krümmung vor der Stelle (Rechtskurve oder Linkskurve ?)	Tangentensteigung nach der Stelle (Rechtskurve oder Linkskurve ?)	
$x=0$	☐ Linkskurve ☐ Rechtskurve	☐ Linkskurve ☐ Rechtskurve	Änderung des Krümmungsverhaltens? , d.h. Wendepunkt vorhanden ja ☐ nein ☐
$x=2$	☐ Linkskurve ☐ Rechtskurve	☐ Linkskurve ☐ Rechtskurve	Änderung des Krümmungsverhaltens? , d.h. Wendepunkt vorhanden ja ☐ nein ☐

Aufgabe 3

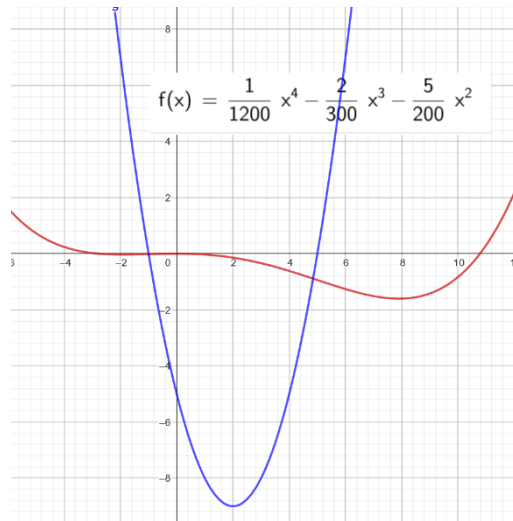


Die Funktion f besitzt eine Wendestellen bei $x=1$

Begründe durch den Vorzeichenwechsel von f'' , ob es sich um einen Wechsel des Krümmungsverhaltens von einer Rechtskurve in eine Linkskurve oder um einen Wechsel von einer Linkskurve zu einer Rechtskurve handelt.

Stelle	Krümmung vor der Stelle (Rechtskurve oder Linkskurve ?)	Tangentensteigung nach der Stelle (Rechtskurve oder Linkskurve ?)	
$x=1$	☐ Linkskurve ☐ Rechtskurve	☐ Linkskurve ☐ Rechtskurve	Änderung des Krümmungsverhaltens? , d.h. Wendepunkt vorhanden ja ☐ nein ☐

Aufgabe 4



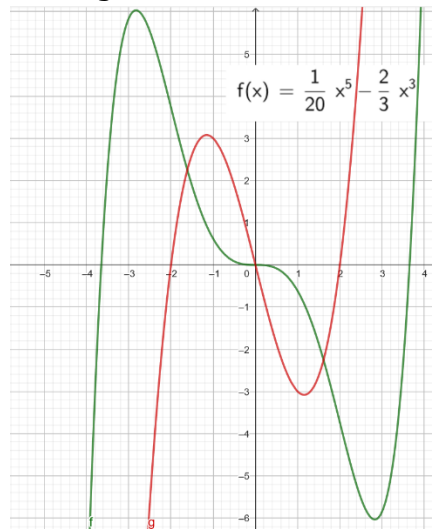
Die Funktion f besitzt Wendestellen bei $x = -1$ und $x = 5$

Begründe durch den Vorzeichenwechsel von f'' , ob es sich um einen Wechsel des Krümmungsverhaltens von einer Rechtskurve

in eine Linkskurve oder um einen Wechsel von einer Linkskurve zu einer Rechtskurve handelt.

Stelle	Krümmung vor der Stelle (Rechtskurve oder Linkskurve ?)	Tangentensteigung nach der Stelle (Rechtskurve oder Linkskurve ?)	
$x = -1$	☐ Linkskurve ☐ Rechtskurve	☐ Linkskurve ☐ Rechtskurve	Änderung des Krümmungsverhaltens? , d.h. Wendepunkt vorhanden ja ☐ nein ☐
$x = 5$	☐ Linkskurve ☐ Rechtskurve	☐ Linkskurve ☐ Rechtskurve	Änderung des Krümmungsverhaltens? , d.h. Wendepunkt vorhanden ja ☐ nein ☐

Aufgabe 5



Die Funktion f besitzt Wendestellen bei $x= 0$ und $x= 2$

Begründe durch den Vorzeichenwechsel von f'' , ob es sich um einen Wechsel des Krümmungsverhaltens von einer Rechtskurve in eine Linkskurve oder um einen Wechsel von einer Linkskurve zu einer Rechtskurve handelt.

Stelle	Krümmung vor der Stelle (Rechtskurve oder Linkskurve ?)	Tangentensteigung nach der Stelle (Rechtskurve oder Linkskurve ?)	
$x=-1$	☐ Linkskurve ☐ Rechtskurve	☐ Linkskurve ☐ Rechtskurve	Änderung des Krümmungsverhaltens? , d.h. Wendepunkt vorhanden ja ☐ nein ☐
$x=5$	☐ Linkskurve ☐ Rechtskurve	☐ Linkskurve ☐ Rechtskurve	Änderung des Krümmungsverhaltens? , d.h. Wendepunkt vorhanden ja ☐ nein ☐

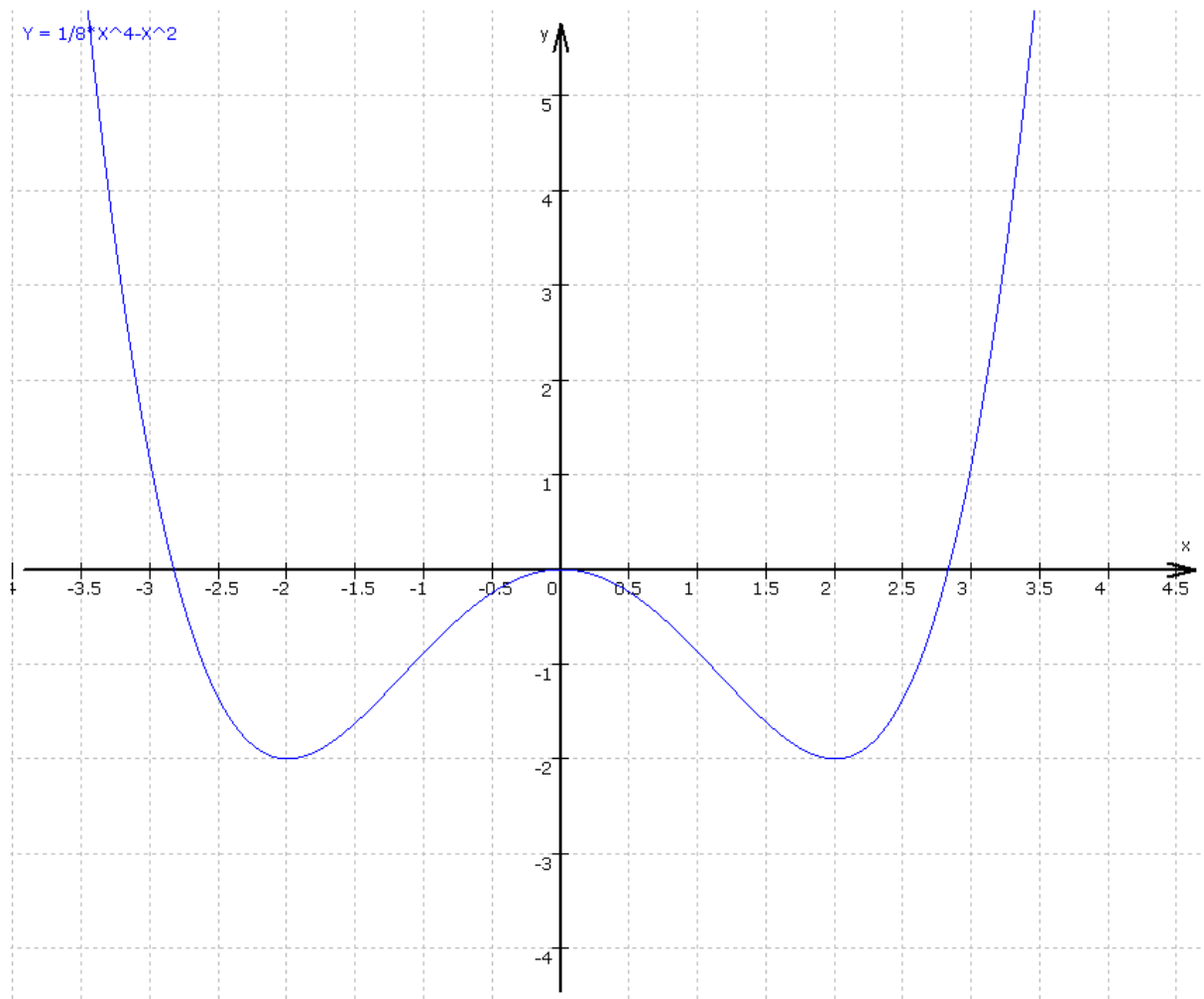
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Ihr Schaubild ist K_f .

Berechnen Sie die exakten Koordinaten der Schnittpunkte von K_f mit der x -Achse und die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte von K_f .

In welchem Intervall auf der positiven x -Achse ist K_f streng monoton fallend?
(exakte Intervallgrenzen)

Zeichnen Sie K_f für $x \in [-3;3]$.



Berechnen Sie die Wendepunkte von K_f ,

wobei $f(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{8}{3}x^2$.

Eine Funktion hat die Funktionsgleichung $f(x) = 27 \cdot x \cdot (x - 2)^2$
Berechnen Sie (exakt) für K_f

1. die Achsenschnittpunkte
2. Die Koordinaten des Wendepunktes
3. Die Extremstellen

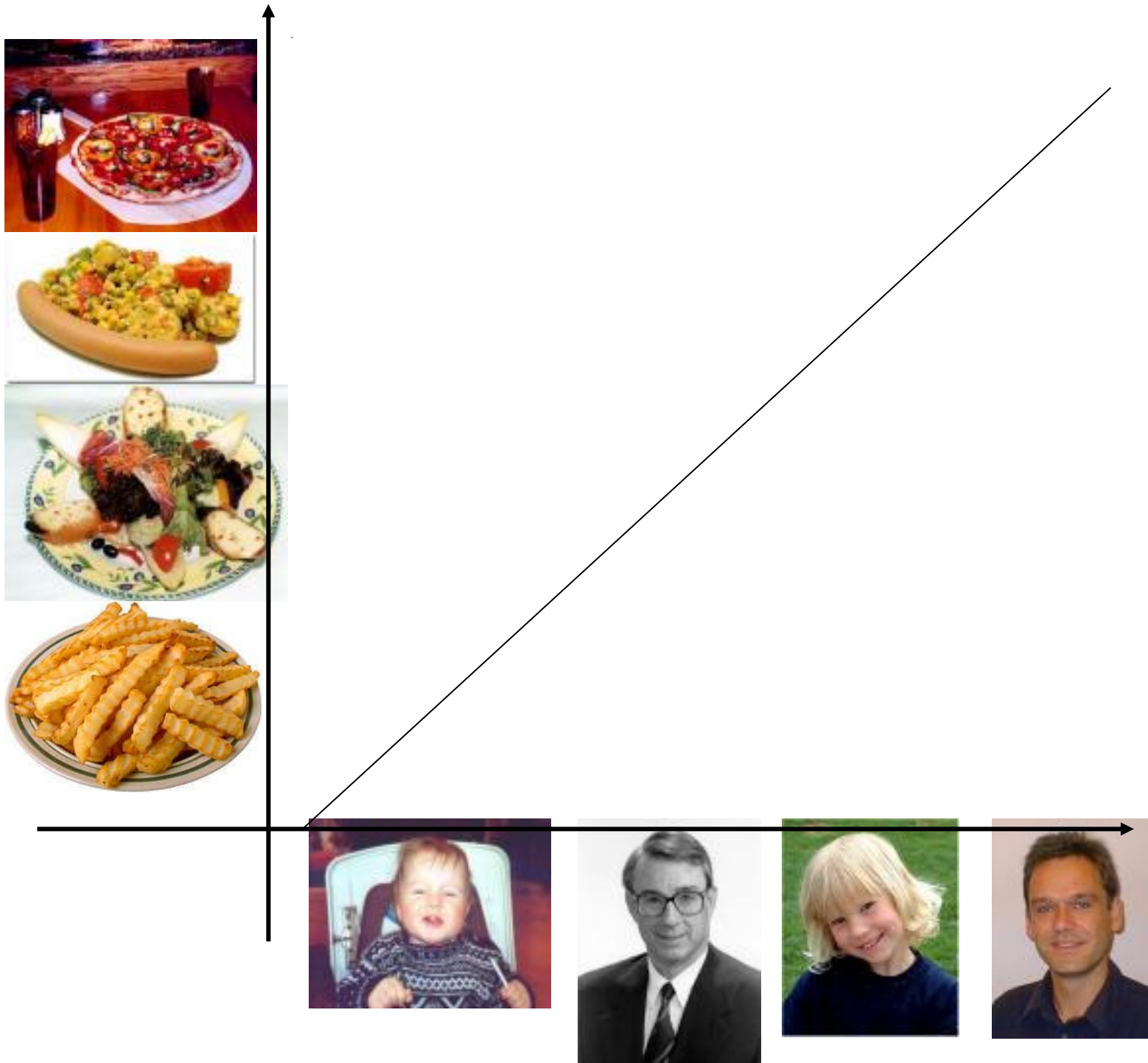
Eine **Funktion** f ist eine Zuordnung, die jedem Element x aus der Definitionsmenge **genau ein** Element y aus der Zielmenge zuordnet.

Die **Umkehrfunktion** f^{-1} (falls existent) dreht die Zuordnungsvorschrift von f um. Ihre Definitionsmenge ist die Wertemenge von f . Sie ordnet jedem Element aus ihrer Definitionsmenge sein Urbild unter f zu.

Der **Graph von f^{-1}** ist der Graph von f , gespiegelt an der ersten Winkelhalbierenden.

Die **Funktionsgleichung von f^{-1}** erhält man durch Auflösen der Funktionsgleichung von f und anschließendes Vertauschen der Variablen x und y .

Eine Funktion f besitzt genau dann eine Umkehrfunktion, wenn sie allen Elementen aus ihrer Definitionsmenge **verschiedene** Elemente aus der Zielmenge zuordnet. Man nennt f dann eine eineindeutige Zuordnung.

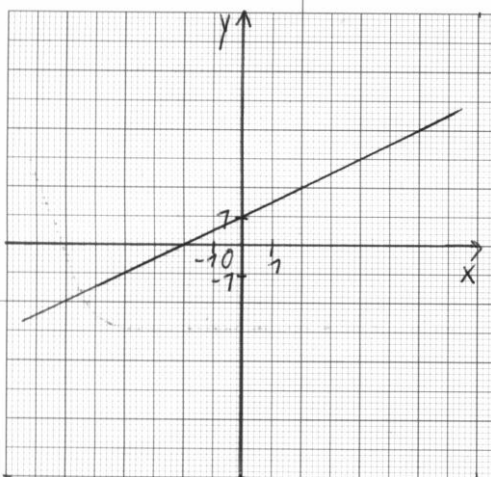


Die Tabelle enthält in der linken Spalte Funktionsgleichungen und in der rechten Spalte die zu deren Umkehrfunktionen gehörigen Gleichungen. Markieren Sie durch Nummerieren welche „Paare“ zusammengehören.
(Nehmen Sie gegebenenfalls Ihren GTR zu Hilfe)

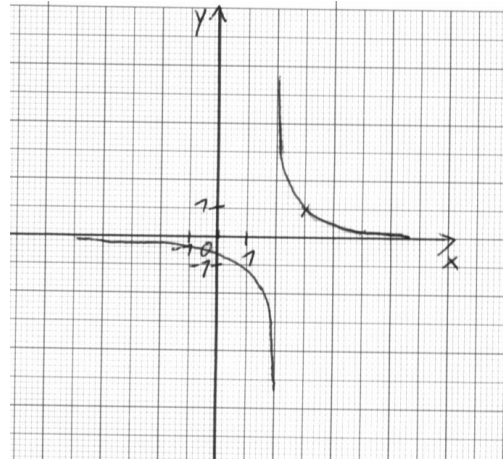
$y = \frac{1}{2}x + 1$		$y = \frac{1}{x-2}$	
$y = \frac{1}{x} + 2$		$y = \ln x \quad \text{für } x > 0$	
$y = e^x$		$y = 2x - 2$	
$y = x^3$		$y = \sqrt[3]{x} \quad \text{für } x > 0$ $y = -\sqrt[3]{-x} \quad \text{für } x < 0$	

Welche Funktionen sind Umkehrfunktionen zueinander?

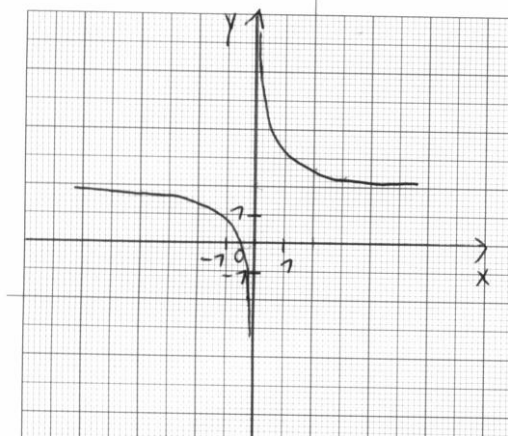
1



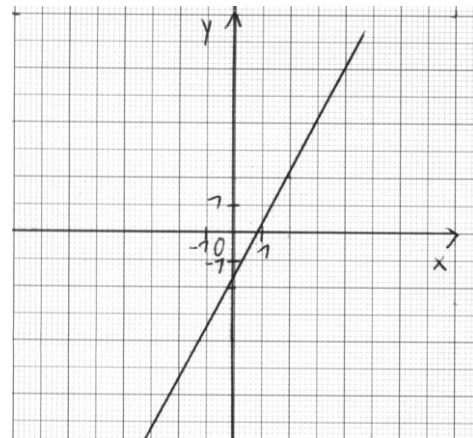
2



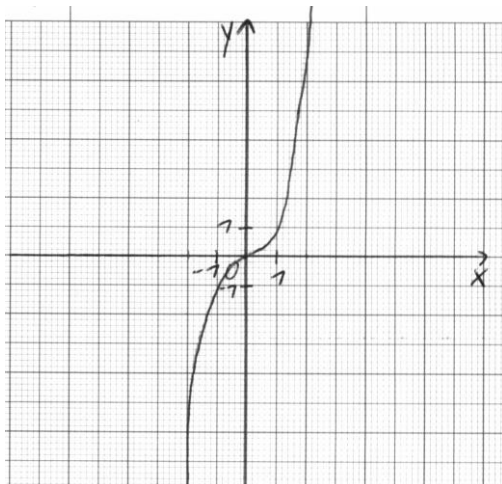
3



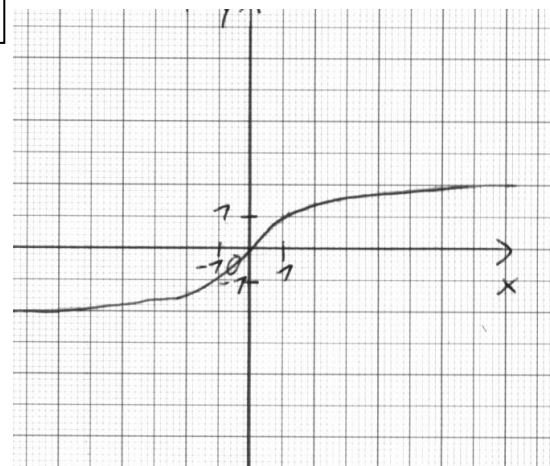
4



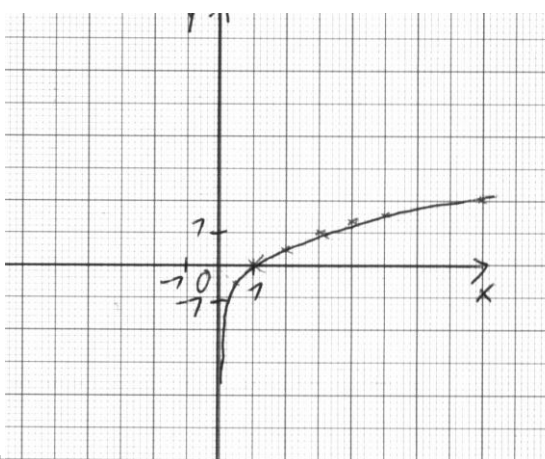
5



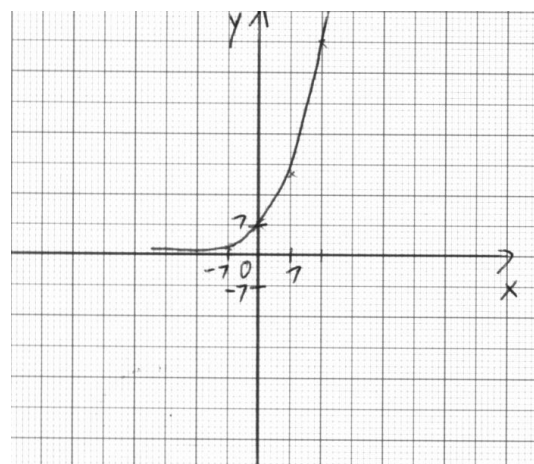
6



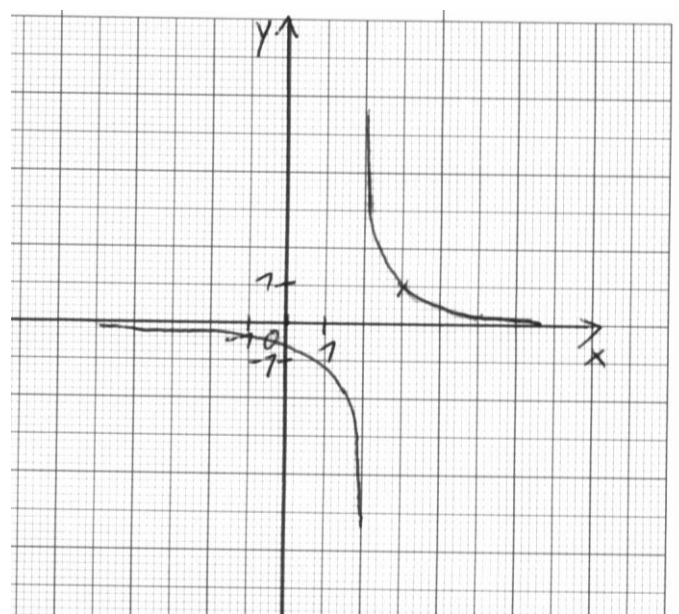
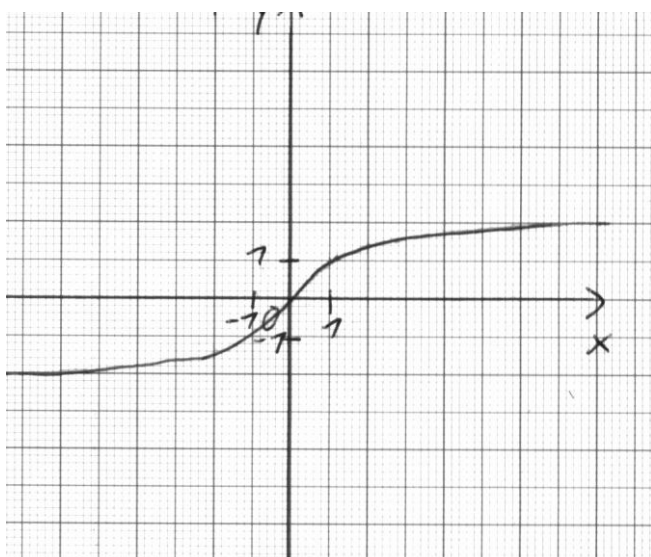
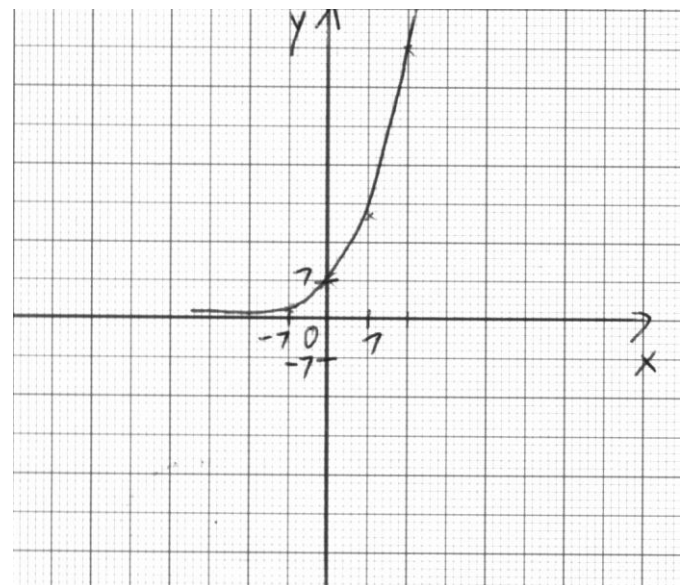
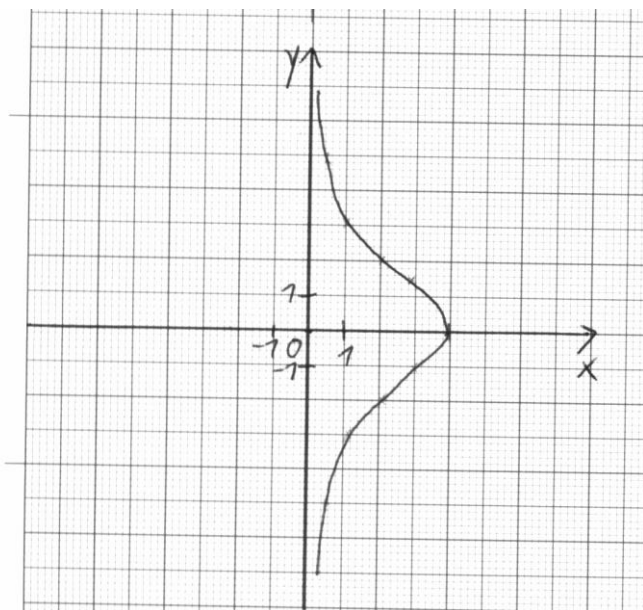
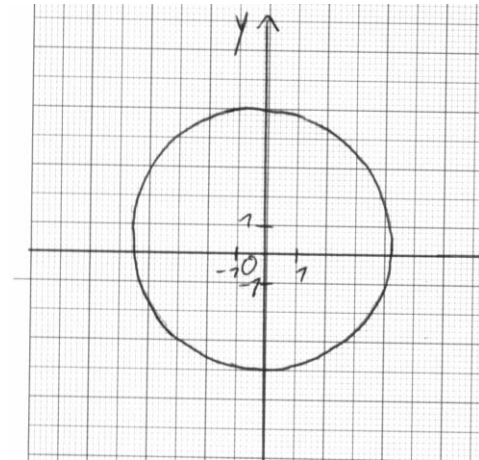
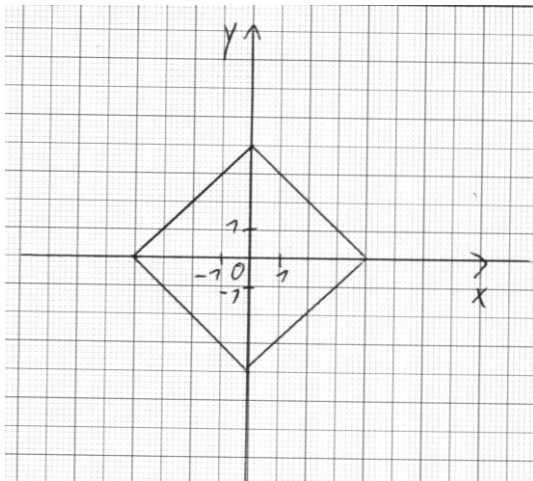
7



8



Entscheiden Sie, welche Schaubilder zu Funktionen gehören



Die Umkehrfunktion

(Füllen Sie die Lücken mit den unten angegebenen Satzbausteinen)

1. Eine **Funktion** f ist eine Zuordnung, die jedem Element x aus der Definitionsmenge zuordnet.
2. Die **Umkehrfunktion** f^{-1} (falls existent) dreht die Zuordnungsvorschrift von f um. Sie ordnet jedem Element aus ihrer Definitionsmenge sein Urbild unter f zu.
3. Der **Graph von f^{-1}** ist
.....
4. Die **Funktionsgleichung von f^{-1}** erhält man
.....
5. Eine Funktion f besitzt genau dann eine Umkehrfunktion, wenn sie allen Elementen aus ihrer Definitionsmenge **verschiedene** Elemente aus der Zielmenge zuordnet. Man nennt f dann eine eindeutige Zuordnung.
 - der Graph von f , gespiegelt an der ersten Winkelhalbierenden.
 - **genau ein** Element y aus der Zielmenge
 - durch Auflösen der Funktionsgleichung von f und anschließendes Vertauschen der Variablen x und y
 - Ihre Definitionsmenge ist die Wertemenge von f

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4$.

- 1) Bestimme rechnerisch den Tiefpunkt.
- 2) Besitzt die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4$ einen Wendepunkt? Berechne gegebenenfalls seine Koordinaten.
- 3) Gegeben ist K_f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4$.

Stelle die Funktionsgleichung der Wendetangente (d.h. die Gleichung der Tangente an K_f , die durch den Wendepunkt geht) auf.

- 4) Gegeben ist K_f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4$.

Die Wendetangente von K_f schließt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck ein. Berechne seinen Flächeninhalt.

- 5) Gegeben ist K_f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4$.

Die Funktionsgleichung von f lässt sich auch in der Form $f(x) = a(x-b)(x-c)^2$ schreiben. Bestimme a , b und c .

- 6) Gegeben ist K_f mit $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4$.

Bestimme die Gleichung der Normalen (Gerade die senkrecht auf der Tangente steht) im Punkt $P(4|0)$.

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 8x^2 + 20x - 16$.

- 1) Bestimme rechnerisch den Tiefpunkt.
- 2) Besitzt die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 8x^2 + 20x - 16$ einen Wendepunkt? Berechne gegebenenfalls seine Koordinaten.
- 3) Gegeben ist K_f mit $f(x) = x^3 - 8x^2 + 20x - 16$.

Stelle die Funktionsgleichung der Wendetangente (d.h. die Gleichung der Tangente an K_f , die durch den Wendepunkt geht) auf.

- 4) Gegeben ist K_f mit $f(x) = x^3 - 8x^2 + 20x - 16$.

Die Wendetangente von K_f schließt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck ein. Berechne seinen Flächeninhalt.

- 5) Gegeben ist K_f mit $f(x) = x^3 - 8x^2 + 20x - 16$.

Die Funktionsgleichung von f lässt sich auch in der Form

$f(x) = a(x-b)(x-c)^2$ schreiben. Bestimme a , b und c .

- 6) Gegeben ist K_f mit $f(x) = x^3 - 8x^2 + 20x - 16$.

Bestimme die Gleichung der Normalen (Gerade die senkrecht auf der Tangente steht) im Wendepunkt von K_f .

Gegeben ist die Funktion $f(x)=5e^x(e^x-1)$.

- 1) Bestimme rechnerisch den Tiefpunkt.
- 2) Besitzt die Funktion f mit $f(x)=5e^x(e^x-1)$ einen Wendepunkt? Berechne gegebenenfalls seine Koordinaten.
- 3) Gegeben ist K_f mit $f(x)=5e^x(e^x-1)$.

Stelle die Funktionsgleichung der Wendetangente (d.h. die Gleichung der Tangente an K_f , die durch den Wendepunkt geht) auf.

Eine ganzrationale Funktion vierten Grades verläuft durch den Punkt $P(-2|-4)$ und besitzt im Ursprung des Koordinatensystems ein relatives Minimum. Die Steigung ihrer Tangente an der Nullstelle $x = -1$ beträgt 3.

Gib die zugehörige Funktionsgleichung an.

Lösungsweg:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

$$f'(x) =$$

$$f(-2) = ?$$

Welche Textstelle informiert Dich darüber?

$$f(0) = ?$$

Welche Textstelle informiert Dich darüber?

$$f'(0) = ?$$

Welche Textstelle informiert Dich darüber?

$$f'(-1) = ?$$

Welche Textstelle informiert Dich darüber?

$$f(-1)=?$$

Welche Textstelle informiert Dich darüber?

$$f(0)=0 \Rightarrow a=$$

Stelle nun mit diesem Wissen ein Gleichungssystem auf:

$$\text{I } f(-2)=\dots a-\dots b+\dots c-\dots d =\dots$$

$$\text{II } f'(0) = \dots a+\dots b+\dots c+\dots d=\dots$$

$$\text{III } f'(-1)=\dots a+\dots b-\dots c=\dots$$

$$\text{IV } f(-1)=\dots a-\dots b+\dots c=\dots$$

Die zu vereinfachende Matrix sieht jetzt so aus:

Mit Deinem Taschenrechner erhältst Du die Matrix:

Das bedeutet für die Variablen

$$a=\dots \quad b=\dots \quad c=\dots$$

Also lautet die gesuchte Funktionsgleichung.

$$f(x)=\dots x^4 + \dots x^3 + \dots x^2$$

1) f ist eine Polynomfunktion 6. Grades. Das Schaubild von f ist symmetrisch zur y -Achse und schneidet die y -Achse im Punkt $P(0|5)$. Gib eine möglichst einfache Form der Funktionsgleichung an.

Lösungsweg: " f ist eine Polynomfunktion 6. Grades"

$$f(x) = ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g$$

"symmetrisch zur y -Achse"

a	kreuze an
muss gleich Null sein	
muss ungleich Null sein	

b	kreuze an
muss gleich Null sein	
muss ungleich Null sein	

c	kreuze an
muss gleich Null sein	
muss ungleich Null sein	

d	kreuze an
muss gleich Null sein	
muss ungleich Null sein	

e	kreuze an
muss gleich Null sein	
muss ungleich Null sein	

f	kreuze an
muss gleich Null sein	
muss ungleich Null sein	

g	kreuze an
muss gleich Null sein	
muss ungleich Null sein	

Punkt $P(0|5)$ liegt auf dem Schaubild $f(\dots) = \dots$

$$f(0) =$$

Also lautet die Funktionsgleichung $f(x) =$

2) Die Polynomfunktion g ist eine Funktion 3. Grades. Ihr Schaubild ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Gib eine möglichst einfache Form der Funktionsgleichung an.

Lösungsweg:

" g ist eine Polynomfunktion 3. Grades" $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

"punktsymmetrisch zum Ursprung"

a	kreuze an
muss gleich Null sein	
muss ungleich Null sein	

b	kreuze an
muss gleich Null sein	
kann ungleich Null sein	

c	kreuze an
muss gleich Null sein	
Kann ungleich Null sein	

d	kreuze an
muss gleich Null sein	
kann ungleich Null sein	

e	kreuze an
muss gleich Null sein	
kann ungleich Null sein	

f	kreuze an
muss gleich Null sein	
kann ungleich Null sein	

g	kreuze an
muss gleich Null sein	
kann ungleich Null sein	

Also lautet die Funktionsgleichung...

3) Die Polynomfunktion h besitzt 4 Nullstellen: $N_1(1|0)$, $N_2(2|0)$, $N_3(3|0)$ und $N_4(4|0)$.

Stelle die zugehörige Funktionsgleichung auf.

Lösungsweg.

Es bietet sich zur Darstellung der Funktionsgleichung die an.

$$h(x) = (x - \dots) \cdot (x - \dots) \cdot (x - \dots) \cdot (x - \dots)$$

4) Das Schaubild der Funktion k ist das Schaubild von g (siehe Frage 2), nur um 3 Einheiten nach oben verschoben.

Lösung: $k(x) = \dots$

5)

m ist eine Polynomfunktion 2. Grades. Ihr Schaubild ist achsensymmetrisch zur y -Achse. Gib eine möglichst einfache Form der Funktionsgleichung an.

Lösungsweg:

" m ist eine Polynomfunktion 2. Grades" $g(x) = ax^2 + bx^1 + c$

"symmetrisch zur y -Achse"

a	kreuze an
muss gleich Null sein	
kann ungleich Null sein	

b	kreuze an
muss gleich Null sein	
kann ungleich Null sein	

c	kreuze an
muss gleich Null sein	
kann ungleich Null sein	

Also lautet die Funktionsgleichung

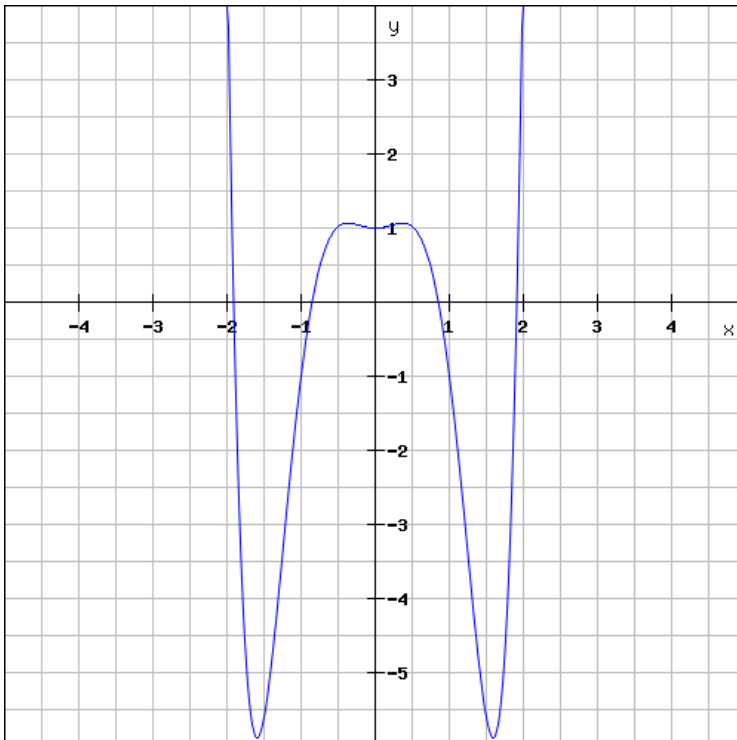
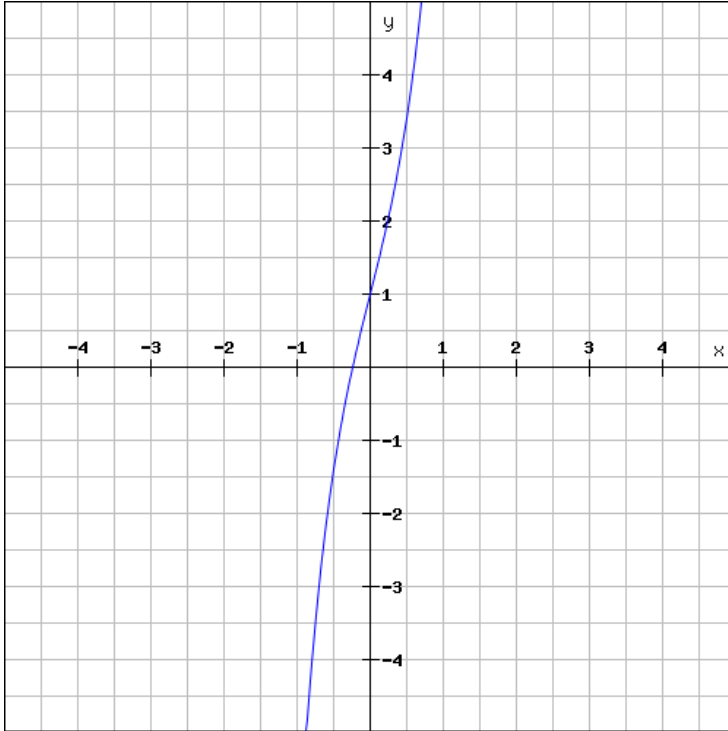
$$g(x) =$$

6)

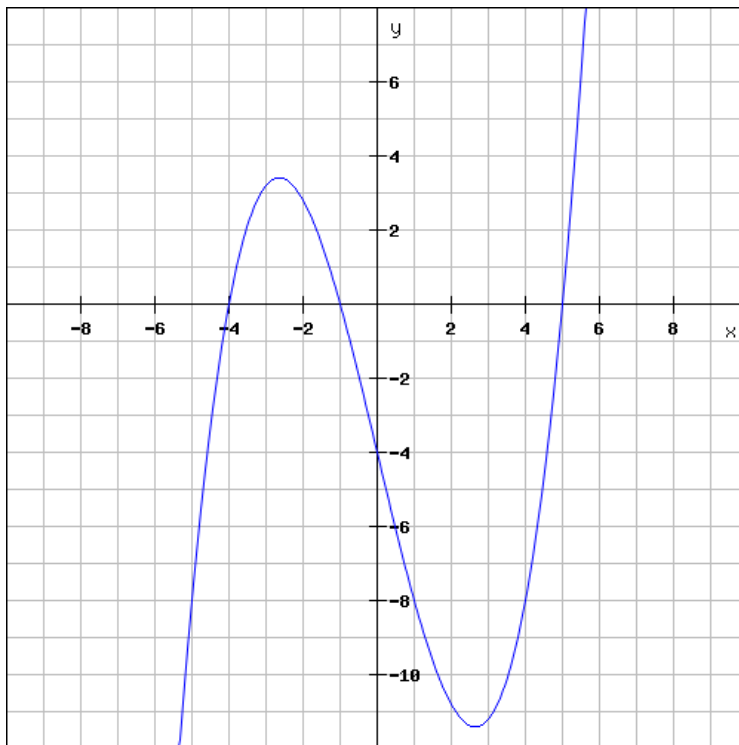
Welche Funktionsgleichung passt zu welchem Schaubild?

$$f(x) = x^5 + 3x^3 + 4x + 1$$

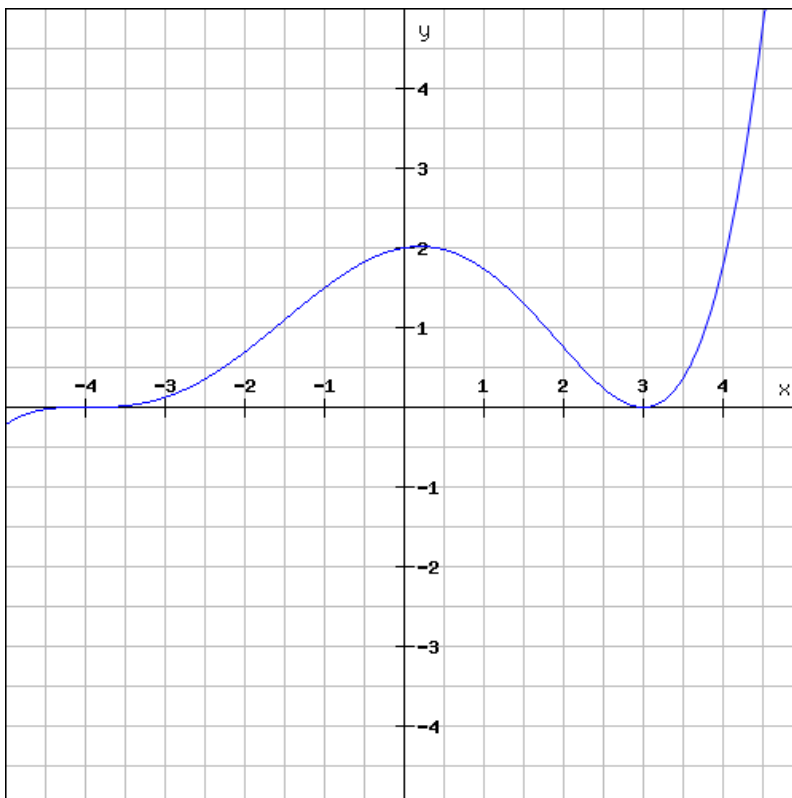
$$f(x) = x^6 - 4x^4 + x^2 + 1$$



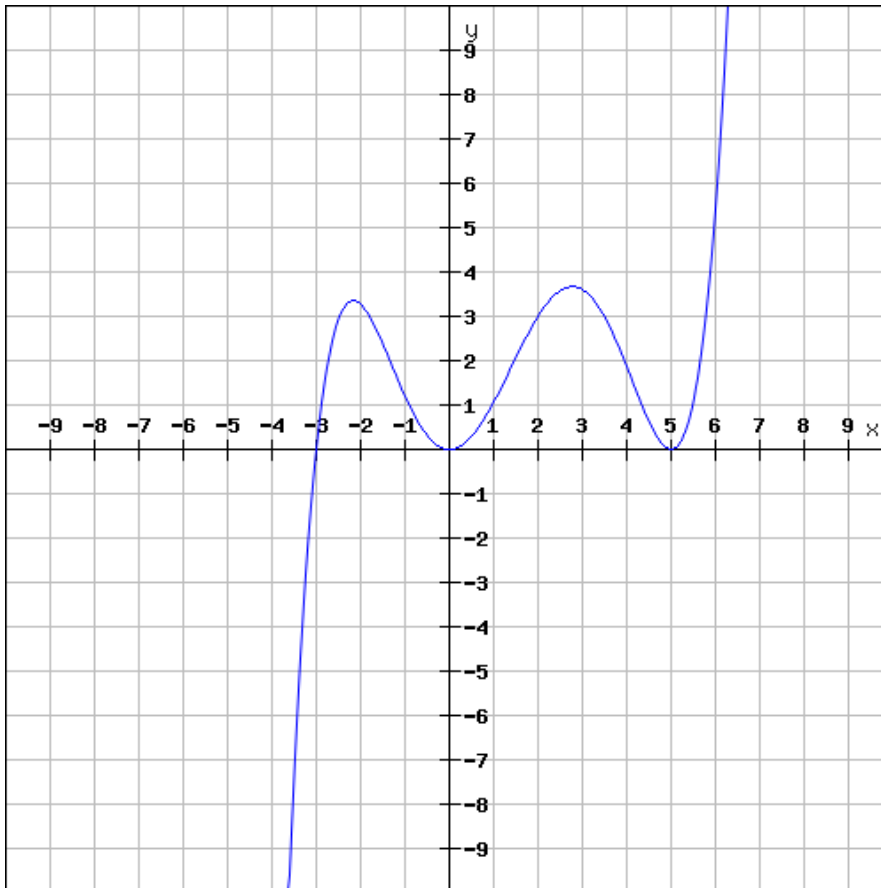
1) Gegeben ist das Schaubild. Stelle den zugehörigen Funktionsterm auf.



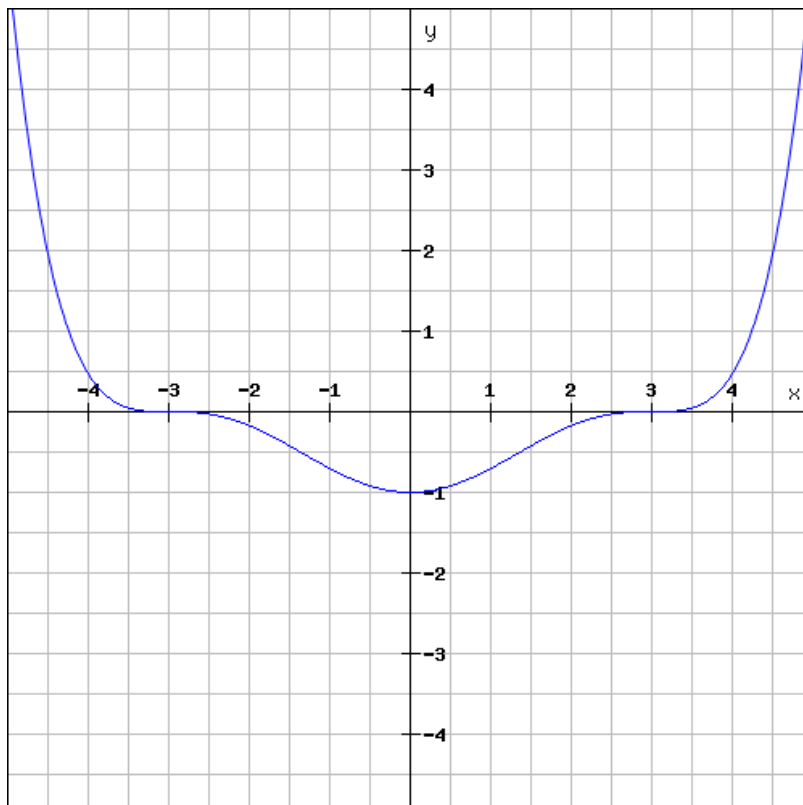
2) Gegeben ist das Schaubild. Stelle den zugehörigen Funktionsterm auf.



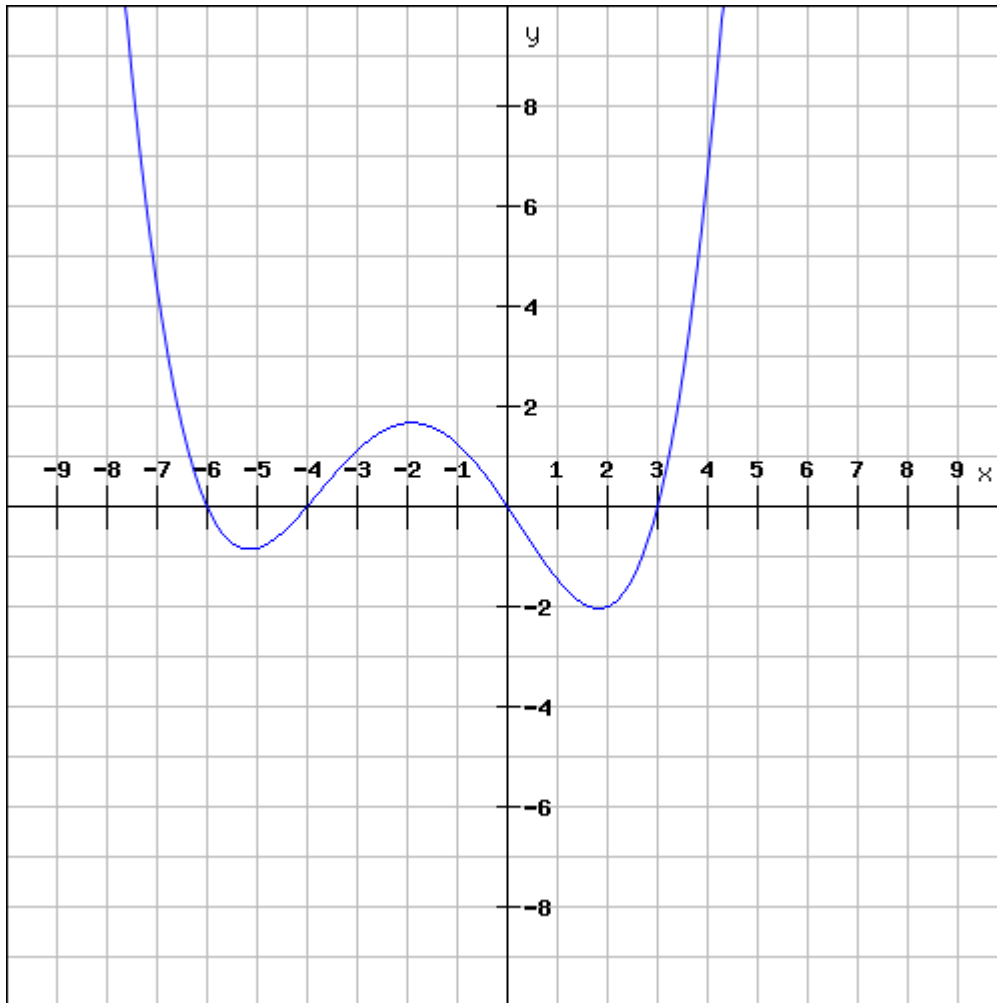
3) Gegeben ist das Schaubild. Stelle den zugehörigen Funktionsterm auf.



4) Gegeben ist das Schaubild. Stelle den zugehörigen Funktionsterm auf.



5) Gegeben ist das Schaubild. Stelle den zugehörigen Funktionsterm auf.



1) Wie lautet der Term einer Polynomfunktion sechsten Grades, die symmetrisch zur y-Achse ist.

Wählen Sie eine oder mehrere Antworten:

- ☐ $x^6 + 3x^4 + 5x^2 + 5$
- ☐ $x^6 + 3x^4 + 5x^2$
- ☐ $x^6 + 3x^3 + 2x^2 + 1$
- ☐ $x^4 + 2x^3 + 7x + 5$
- ☐ $6x^6 + 4x^4 + 2x^2 + 1$

2) Wie lautet der Term einer Polynomfunktion fünften Grades, die punktsymmetrisch zum Ursprung ist?

Wählen Sie eine oder mehrere Antworten:

- ☐ $x^5 + 3x^3 + 5x + 5$
- ☐ $x^5 - 2x^4 + x^2 + x$
- ☐ $x^5 + 3x^3 - 5x$
- ☐ $x^5 + x^9 + 3$
- ☐ $x^5 - 3x^3 + 2x$

3) Wie lautet der Term einer Polynomfunktion zweiten Grades, die vom zweiten in den ersten Quadranten verläuft?

Wählen Sie eine oder mehrere Antworten:

- ☐ $-2x^2 + 3x + 1$
- ☐ $x^2 + 20$
- ☐ $2x^2 + 3x + 2$
- ☐ $x^2 - 3x^4 + 5x^2 + 5$
- ☐ $8x^2 - 15x + 26$

4) Wie lautet der Term einer Polynomfunktion neunten Grades, die keine Achsensymmetrie und keine Symmetrie zum Ursprung aufweist?

Wählen Sie eine oder mehrere Antworten:

- ☐ $x^9+3x^4+11x^2-13$
- ☐ $x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$
- ☐ x^9+18x^3+7x
- ☐ x^9+18x^3+7x+1
- ☐ $x+3x^9+5x^5$

5) Wie lautet der Term einer Polynomfunktion zweiten Grades, die vom dritten in den vierten Quadranten verläuft?

Wählen Sie eine oder mehrere Antworten:

- ☐ $3x^2+3x+4$
- ☐ $-3x^2+3x+4$
- ☐ $x-2x^2+36$
- ☐ x^2+x+1
- ☐ $-x^2$

Um zu erkennen, wie das Schaubild einer Polynomfunktion (z.B. $p(x) = x^6 - 3x^5 + x^2 + 9$) verläuft, genügt es, den höchsten Exponenten (hier x^6) zu betrachten.

Einsetzen einer „großen“ Zahl wie -1000 ergibt:

$$((-1000)^6 = +1000000000000000000).$$

Das Schaubild kommt aus dem zweiten Quadranten.

Einsetzen von 1000 ergibt $1000^6 = +1000000000000000000$. Das Schaubild verschwindet in den ersten Quadranten.

Beispiele:

$$p(x) = x^5 + 4x^3 - 7x^2 + 13$$

Der höchste Exponent ist, also

Das Schaubild kommt aus dem Quadranten.

Das Schaubild verschwindet in den Quadranten.

2)

$$p(x) = x^8 + 5x^4 - 7x^2 + 1$$

Der höchste Exponent ist, also

Das Schaubild kommt aus dem Quadranten.

Das Schaubild verschwindet in den Quadranten.

3)

$$p(x) = -x^7 + 4x^5 + 7x^3 - 9$$

Der höchste Exponent ist, also}. (Beachte aber das Vorzeichen)

Das Schaubild kommt aus dem Quadranten.

Das Schaubild verschwindet in den Quadranten.

4)

$$p(x) = -x^4 + 4x^3 + 8x + 3$$

Der höchste Exponent ist, also

Das Schaubild kommt aus dem Quadranten.

Das Schaubild verschwindet in den Quadranten.

Verlauf des Schaubilds einer Polynomfunktion:

Um zu erkennen, wie das Schaubild einer Polynomfunktion (z.B. $p(x) = x^6 - 3x^5 + x^2 + 9$) verläuft, genügt es, den höchsten Exponenten (hier x^6) zu betrachten.

Einsetzen einer „großen“ Zahl wie -1000 ergibt: $(-1000)^6 = +1000000000000000000$. Das Schaubild kommt aus dem zweiten Quadranten.

Einsetzen von 1000 ergibt $1000^6 = +1000000000000000000$. Das Schaubild verschwindet in den ersten Quadranten.

ergänze folgende Tabelle:

Term der Polynomfunktion **Höchster Exponent** **Schaubild kommt aus dem Vorzeichen** **Schaubild verschwindet in den**

$x^5 + 4x^3 - 7x^2 + 13$		Quadranten		Quadranten
$x^8 + 5x^4 - 7x^2 + 1$		Quadranten		Quadranten
$-x^7 + 4x^3 + 7x^3 - 9$		Quadranten		Quadranten
$-x^4 + 4x^3 + 8x + 3$		Quadranten		Quadranten

1)

Folgendes Rezept kann zum Skizzieren des Schaubildes K_f einer ganzrationalen Funktion 3. Grades sinnvoll sein:

1. Berechne die Schnittpunkte mit der x-Achse.
2. Bestimme den Schnittpunkt mit der y-Achse.
3. Untersuche $f(x)$ auf das Verhalten für „große“ x-Werte.
4. Untersuche das Schaubild K_f von f auf Punktsymmetrie zu $O(0|0)$.

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x$

2)

Folgendes Rezept kann zum Skizzieren des Schaubildes K_f einer ganzrationalen Funktion 3. Grades sinnvoll sein:

1. Berechne die Schnittpunkte mit der x-Achse.
2. Bestimme den Schnittpunkt mit der y-Achse.
3. Untersuche $f(x)$ auf das Verhalten für „große“ x-Werte.
4. Untersuche das Schaubild K_f von f auf Punktsymmetrie zu $O(0|0)$.

Beispiel: $f(x) = -3x^3 + 6x^2$

3)

Folgendes Rezept kann zum Skizzieren des Schaubildes K_f einer ganzrationalen Funktion 3. Grades sinnvoll sein:

1. Berechne die Schnittpunkte mit der x-Achse.
2. Bestimme den Schnittpunkt mit der y-Achse.
3. Untersuche $f(x)$ auf das Verhalten für „große“ x-Werte.
4. Untersuche das Schaubild K_f von f auf Punktsymmetrie zu $O(0|0)$.

Beispiel: $f(x) = (x-1)^3$

1) Für welchen Funktionsterm geht das zugehörige Schaubild durch den Ursprung?

Wählen Sie eine oder mehrere Antworten:

- a) $f(x) = x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 2x$
- b) $f(x) = 5x^4 + 7x^2 + 2x + 8$
- c) $f(x) = 8x^3 + x^2 + 2x$
- d) $f(x) = 7x^2 + 2x + 10$

2)

Für welchen Funktionsterm ist das zugehörige Schaubild symmetrisch zur y-Achse?

Wählen Sie eine oder mehrere Antworten:

- a) $f(x) = x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 2x$
- b) $f(x) = 5x^4 + 7x^2$
- c) $f(x) = 8x^3 + x^2 + 2x$
- d) $f(x) = 7x^3 + 2x + 10$
- e) $f(x) = x^6 + 3x^4 + 7x^2$
- f) $f(x) = x^4 + x^2$

3)

Für welchen Funktionsterm ist das zugehörige Schaubild punktsymmetrisch zum Ursprung?

Wählen Sie eine oder mehrere Antworten:

- a) $f(x) = x^5 + 3x^3 + 2x$
- b) $f(x) = 5x^4 + 7x^2 + x$
- c) $f(x) = 8x^3 + x$
- d) $f(x) = 7x^3 + 2x + 10$
- e) $f(x) = x^7 + 3x^3 + 7x$

4) Formuliere einen Merksatz:

Das Schaubild einer Polynomfunktion geht genau dann durch den Ursprung, wenn

- a) alle Hochzahlen gerade sind und ein konstanter Summand im Funktionsterm vorhanden ist
- b) alle Hochzahlen ungerade sind und ein konstanter Summand im Funktionsterm kein konstanter Summand im Funktionsterm vorhanden ist

5)

Formuliere einen Merksatz:

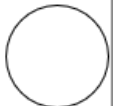
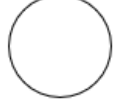
Das Schaubild einer Polynomfunktion ist genau dann punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn

- a) alle Hochzahlen gerade sind
- b) alle Hochzahlen ungerade sind und kein konstanter Summand im Funktionsterm vorhanden ist.
- c) kein konstanter Summand im Funktionsterm vorhanden ist.

Eine Verknüpfung $\circ$ auf einer Menge ist eine Vorschrift, die zwei Elemente der Menge auf ein Element der Menge abbildet.

Beispiel: Elemente: blau, gelb, grün, bunt;
Verknüpfung: „mischen“,

Anmerkung: Eine Mischung, egal zu welchen Anteilen aus blau und gelb sei grün. Eine Mischung aus mehr als drei verschiedenen Farben sei bunt. Füllen Sie die Tabelle (Verknüpfungstafel) aus mit Farben oder Worten

mischen					
					
					
					
					
					

Die Elemente der Menge könnten Funktionen sein.

Bsp. $f(x)=e^x$ und $g(x)=x^2 + 3$

Verknüpfung mit + (Therme der Funktionsgleichung addieren)

Verknüpfung mit - (Therme der Funktionsgleichung subtrahieren)

Verknüpfung mit $\cdot$ (Therme der Funktionsgleichung multiplizieren)

Oder das Hintereinanderausführen der Funktionen (Verkettung)

$f(g(x))= e^{x^2+3}$ ist übrigens nicht kommutativ:

$g(f(x))= e^{x^2} + 3$

Addieren +	$f(x)= x +1$	$f(x)= x$	$f(x)= x -1$	$f(x)= x^3$
$f(x)= x +1$				
$f(x)= x$				
$f(x)= 3$				
$f(x)= \sin(x)$				

Führen Sie die Verknüpfung $+$ mit den in obiger Tabelle angegebenen Funktionen als Elementen aus. Legen Sie anschließend auch eine Tafel mit der Verknüpfung $\cdot$ und mit der Verknüpfung „Verketteten von Funktionen“ an.

Eine Menge kann bezüglich der Verknüpfungen besondere Elemente enthalten.

Das Einselement 1 ändert nichts beim Verknüpfen, d.h. wenn irgendein Element e mit 1 verknüpft kommt e heraus:

$$1 \circ e = e \quad \text{und} \quad e \circ 1 = e$$

Das neutrale n Element ändert nichts beim Verknüpfen,

d.h. wenn man irgendein Element e mit n verknüpft kommt n heraus: $n \circ e = n$ und $e \circ n = n$

Ein inverses Element kann es zu jedem Element geben. Wir notieren es mit e^{-1} d.h. $e \circ e^{-1} = 1$. Bei der Verknüpfung eines Elementes mit seinem inversen Element kommt also das Einselement heraus.

Suchen Sie für die Menge von Funktionen das Einselement und das neutrale Element und zu den Funktionen

$f(x) = x + 1$ und $g(x) = x^3$ das jeweils das inverse Element.

- a) Für die Verknüpfung $+$
- b) Für die Verknüpfung $\cdot$
- c) Für das Verketteten von Funktionen

Gegeben sind die Funktionen im ersten Kasten. Ergänzen Sie die Transformationen in den übrigen Kästen

$f(x) = e^x$ $f(x) = 2^x$ $f(x) = \sin(x)$ $f(x) = \cos(x)$ $f(x) = \sqrt{x}$ $f(x) = x^2$	$f(x) =$ $f(x) =$ $f(x) =$ $f(x) =$ $f(x) =$ $f(x) =$ $f(x) =$ um 3 nach links verschoben	$f(x) =$ $f(x) =$ $f(x) =$ $f(x) =$ $f(x) =$ $f(x) =$ $f(x) =$ an der y-Achse gespiegelt
$f(x) =$ $f(x) =$ $f(x) =$ $f(x) =$ $f(x) =$ $f(x) =$ $f(x) =$ an der x-Achse gespiegelt	$f(x) =$ $f(x) =$ $f(x) =$ $f(x) =$ $f(x) =$ $f(x) =$ $f(x) =$ mit dem Faktor 3 in x- Richtung gestaucht	$f(x) =$ $f(x) =$ $f(x) =$ $f(x) =$ $f(x) =$ $f(x) =$ $f(x) =$ mit dem Faktor 3 in y- Richtung gestreckt
$f(x) =$ $f(x) =$ $f(x) =$ $f(x) =$ $f(x) =$ $f(x) =$ $f(x) =$ mit dem Faktor 1/3 in x- Richtung gestreckt	$f(x) =$ $f(x) =$ $f(x) =$ $f(x) =$ $f(x) =$ $f(x) =$ $f(x) =$ mit dem Faktor 1/3 in y- Richtung gestaucht	

Fülle die Tabellen aus und zeichne die Funktionen in dasselbe Koordinatensystem:

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{2}{6}\pi$	$\frac{3}{6}\pi$	$\frac{4}{6}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{8}{6}\pi$	$\frac{9}{6}\pi$	$\frac{10}{6}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
f(x)=sin(x)													

x	0	$\frac{0,5}{6}\pi$	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1,5}{6}\pi$	$\frac{2}{6}\pi$	$\frac{2,5}{6}\pi$	$\frac{3}{6}\pi$	$\frac{3,5}{6}\pi$	$\frac{4}{6}\pi$	$\frac{4,5}{6}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{5,5}{6}\pi$	π	$\frac{6,5}{6}\pi$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{7,5}{6}\pi$	$\frac{8}{6}\pi$	$\frac{8,5}{6}\pi$	$\frac{9}{6}\pi$	$\frac{9,5}{6}\pi$	$\frac{10}{6}\pi$	$\frac{10,5}{6}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	$\frac{11,5}{6}\pi$	2π
f(x)=sin(2x)																									

Fülle die Tabellen aus und zeichne die Funktionen in dasselbe Koordinatensystem:

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{2}{6}\pi$	$\frac{3}{6}\pi$	$\frac{4}{6}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{8}{6}\pi$	$\frac{9}{6}\pi$	$\frac{10}{6}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
f(x)=sin(x)													

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{2}{6}\pi$	$\frac{3}{6}\pi$	$\frac{4}{6}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{8}{6}\pi$	$\frac{9}{6}\pi$	$\frac{10}{6}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
f(x)=sin(x - $\frac{1}{6}\pi$)	-0,5												

Fülle die Tabellen aus und zeichne die Funktionen in dasselbe Koordinatensystem:

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{2}{6}\pi$	$\frac{3}{6}\pi$	$\frac{4}{6}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{8}{6}\pi$	$\frac{9}{6}\pi$	$\frac{10}{6}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
f(x)=sin(x)													
x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{2}{6}\pi$	$\frac{3}{6}\pi$	$\frac{4}{6}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{8}{6}\pi$	$\frac{9}{6}\pi$	$\frac{10}{6}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
f(x)=sin(x) +2													

Fülle die Tabellen aus und zeichne die Funktionen in dasselbe Koordinatensystem:

x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{2}{6}\pi$	$\frac{3}{6}\pi$	$\frac{4}{6}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{8}{6}\pi$	$\frac{9}{6}\pi$	$\frac{10}{6}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
f(x)=sin(x)													
x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{2}{6}\pi$	$\frac{3}{6}\pi$	$\frac{4}{6}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{8}{6}\pi$	$\frac{9}{6}\pi$	$\frac{10}{6}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
f(x)=-sin(x)													

Wiederholung der Kurvendiskussion vor der Einführung der Integralrechnung

Wir haben uns mit Funktionen beschäftigt. Wir haben definiert, was man unter einer Funktion versteht und wir haben den Verlauf des zugehörigen Schaubilds beschrieben. D.h. wir haben es untersucht auf sein Verhalten gegen unendlich (woher kommt es wohin geht es), auf Monotoniebereiche (streng monoton wachsend oder fallend), auf Extremstellen und Wendestellen und Symmetrie.

Eine Funktion ist eine , bei der jedem Element der (Teilmenge der x-Achse) genau ein Element aus der (Teilmenge der y-Achse) zugeordnet wird.

Man kann eine Funktion zum Beispiel notieren indem man die zur Funktion gehörige Gleichung angibt (..... $f(x)=...$) oder indem man das K_f in ein Koordinatensystem zeichnet oder indem man die angibt.

Um das Schaubild zu untersuchen, ist es hilfreich, sich die der Tangente anzusehen.

Wo sie (echt) größer Null ist, das Schaubild (streng) monoton, wo sie kleiner Null ist das Schaubild (streng monoton).

Wo sie ist, könnte eine Extremstelle sein und ist genau dann eine Extremstelle, wenn die Tangentensteigung von - zu + wechselt (.....) oder von + zu - wechselt (.....)

Auch die Tangentensteigung kann man als Funktion jeder Stelle auf der x Achse zuordnen (....., $f'(x)$).

Wo $f'(x)$ wächst, macht das Schaubild von f eine, wo $f'(x)$ fällt, hat das Schaubild von f eine

Wo $f'(x)$ von steigend zu fallend wechselt, haben die Tangentensteigungen an das Schaubild von $f'(x)$ eine und das Schaubild von $f(x)$, also das Schaubild der, d.h.

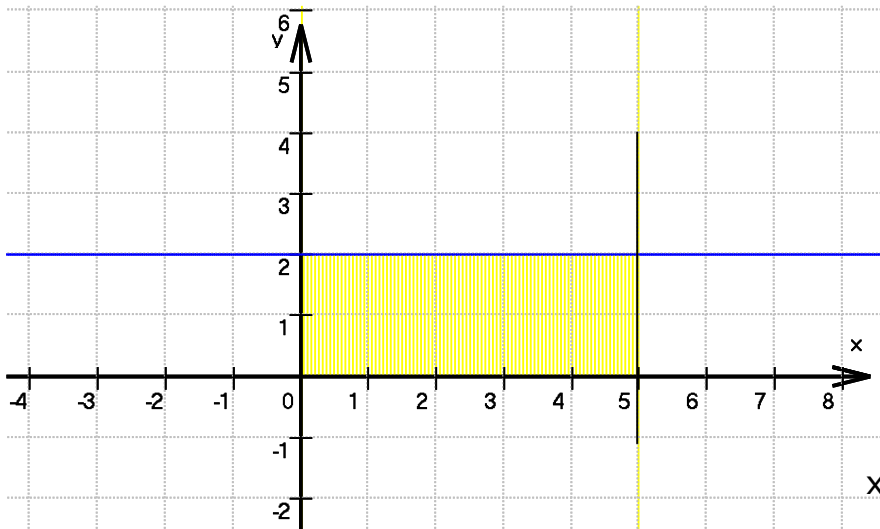
..... von $f(x)$ hat dort eine

Ordnen Sie folgende Begriffe in die Lücken im Text ein:

Extremstelle, Zuordnung, Funktionsgleichung, Wertetabelle, steigt, gleich Null, Hochpunkt, Schaubild, Ableitung, Linkskurve, Rechtskurve Nullstelle, Ableitungsfunktion, Definitionsmenge, Steigung, fällt, Tiefpunkt Tangentensteigungsfunktion, Wertemenge

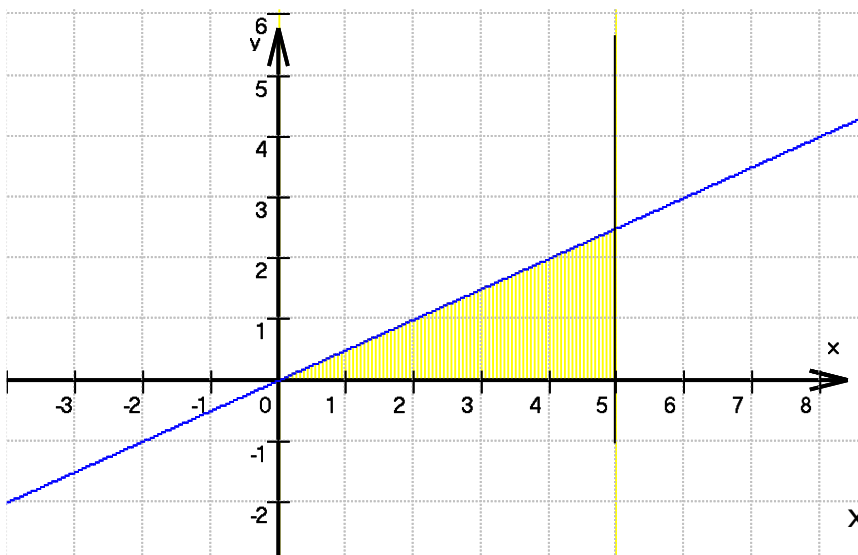
Die Flächeninhaltsfunktion $F(x)$ gibt den Inhalt der Fläche unterhalb eines Schaubilds von der Stelle 0 bis zur Stelle x an.

1) **Beispiel:** $f(x) = 2$



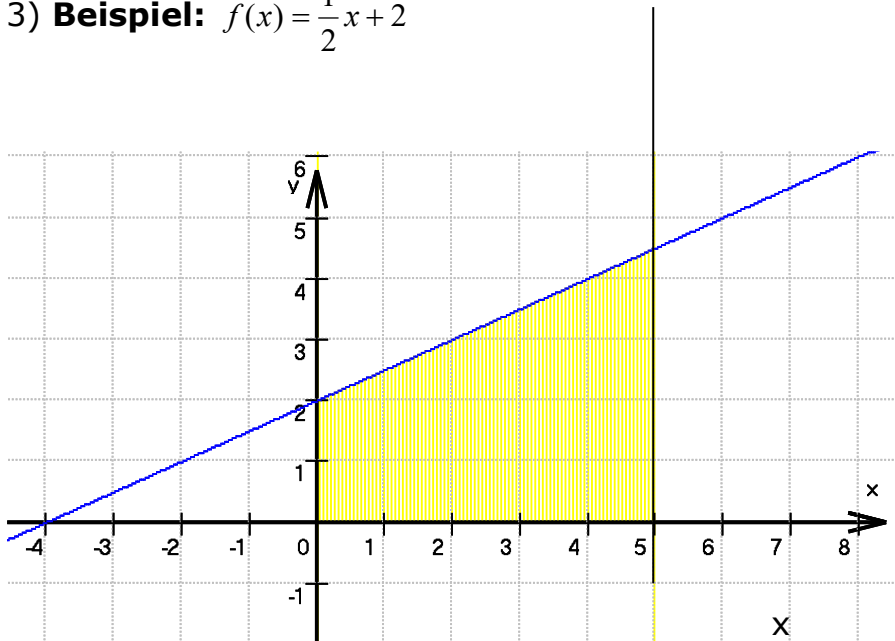
Der Flächeninhalt beträgt $F(x) =$

2) **Beispiel:** $f(x) = \frac{1}{2}x$



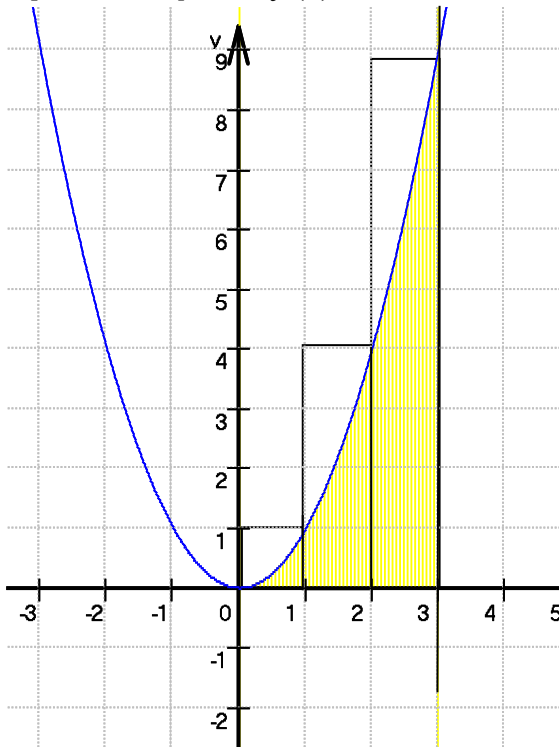
Der Flächeninhalt beträgt $F(x) =$

3) **Beispiel:** $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$



Der Flächeninhalt beträgt $F(x) =$

4) **Beispiel:** $f(x) = x^2$



Bei einer krummlinig begrenzten Fläche wird die Fläche in Rechtecke eingeteilt, und als Näherung die Rechtecksumme berechnet. Je kleiner die Rechtecksbreite Δx , desto genauer das Ergebnis.

$$F(x) = f(1 \cdot \Delta x) \cdot \Delta x + f(2 \cdot \Delta x) \cdot \Delta x + f(3 \cdot \Delta x) \cdot \Delta x + \dots + f(n \cdot \Delta x) \cdot \Delta x$$

$$= 1 \cdot \Delta x^2 \cdot \Delta x + 4 \cdot \Delta x^2 \cdot \Delta x + 9 \cdot \Delta x^2 \cdot \Delta x + \dots + n^2 \cdot \Delta x^2 \cdot \Delta x$$

$$= \Delta x^3 \cdot (1 + 4 + 9 + \dots + n^2)$$

$$= \Delta x^3 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$= \left(\frac{x}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{6} x^3 \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{(n+1)}{n} \cdot \frac{(2n+1)}{n} = \frac{1}{6} x^3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2$$

$$= \frac{1}{3} x^3$$

Zusammenfassung der Beispiele und Herleitung eines allgemeinen Zusammenhanges zum Auffinden einer Flächeninhaltsfunktion bei Polynomfunktionen:

f(x)	f(x)=2	$f(x) = \frac{1}{2}x$	$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$	$f(x) = x^2$
F(x)	F(x)=	F(x)=	F(x)=	F(x)=

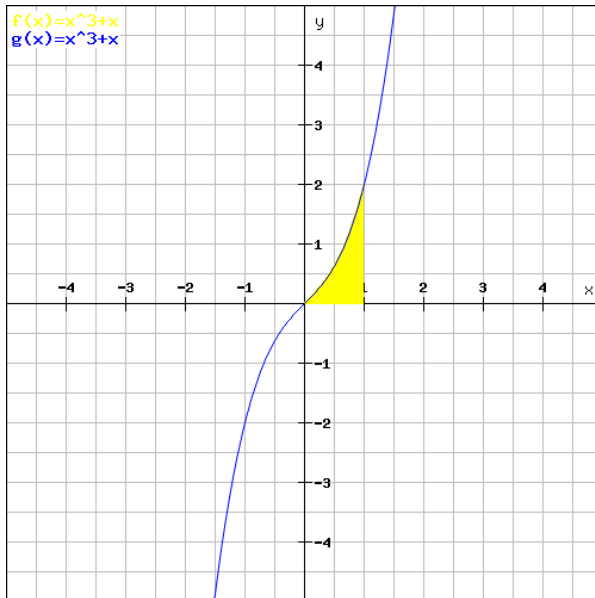
Merke: die Flächeninhaltsfunktion bei Polynomfunktionen erhält man, indem man die Hochzahl um 1 vergrößert und den Kehrwert dieser Zahl zusätzlich als Faktor vor die Funktionsvorschrift schreibt.

Somit gilt für $f(x) = x^n$ ist $F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ eine zugehörige Flächeninhaltsfunktion.

Die Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^3 + x$, $a \neq 0$ schließt mit der x -Achse und der Geraden $x = 1$ eine Fläche vom Inhalt 1 ein.

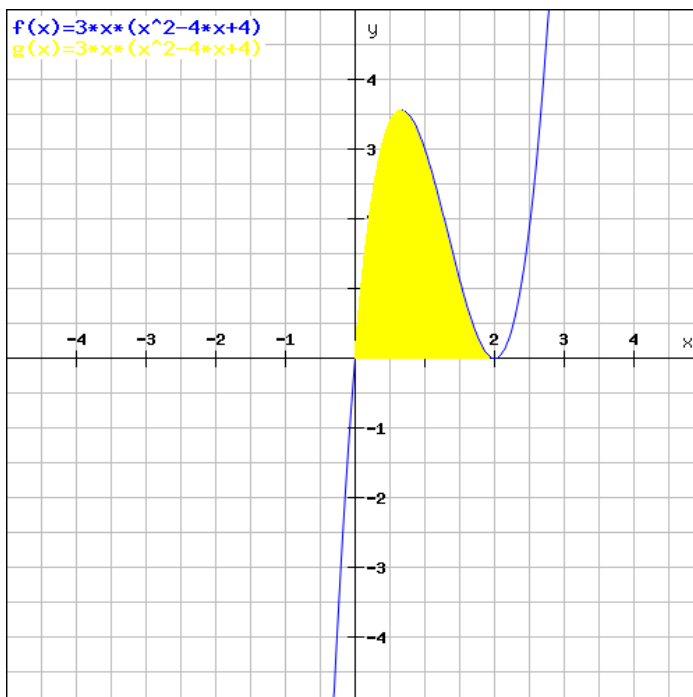
Bestimme den Parameter a .

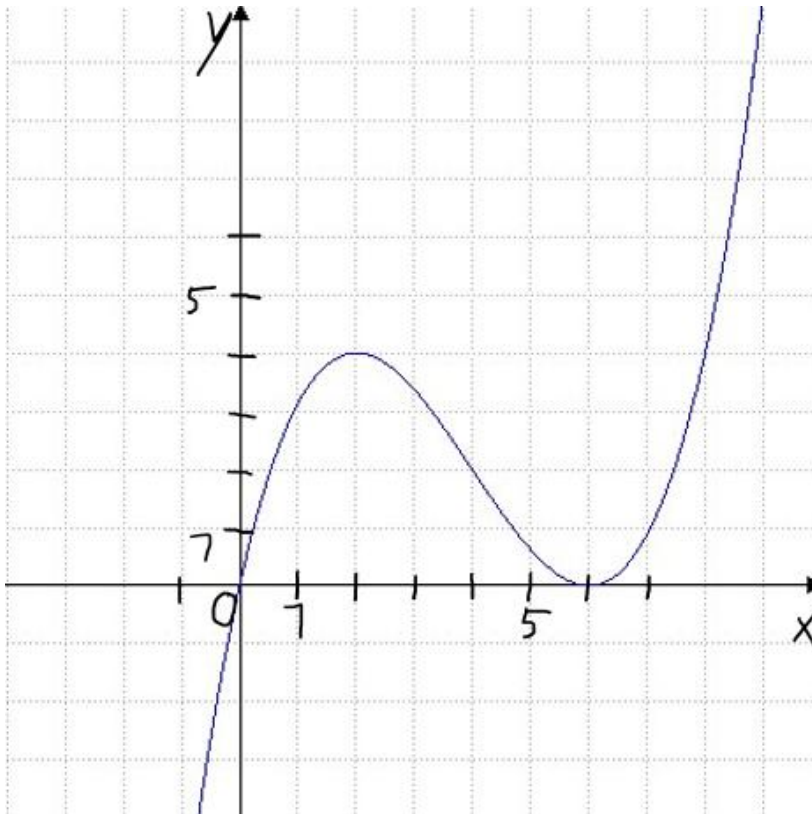
Lösungsweg: Skizziere die Funktion zur besseren Übersicht kurz, z.B. für $a=1$.



Das Schaubild K_f der Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot x \cdot (x-2)^2$ schließt mit der x -Achse im ersten Quadranten eine Fläche. Berechne exakt ihren Flächeninhalt.

Lösungsweg: Skizziere die Funktion zur besseren Übersicht kurz.





Stellen Sie die Funktionsgleichung zum angegebenen Schaubild auf.

$$f(x) = a \cdot x \cdot (x - 6)^2$$

$$f(2)=4 \Rightarrow a \cdot 2 \cdot (2 - 6)^2 = 4$$

$$a \cdot 2 \cdot 16 = 4$$

$$a = \frac{1}{8}$$

$$\text{also: } f(x) = \frac{1}{8} \cdot x \cdot (x - 6)^2$$

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der Wendetangente an K_f .

Bestimmen Sie eine Stammfunktion:

a) $f(x) = 3x^3$

b) $f(x) = \frac{1}{5}x^4 + 4x^3 + x^2 + 1$

c) $f(x) = \sqrt{3}x + x^{100}$

d) $f(x) = 3\sqrt{x}$

e) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x^9 - 16$

f) $f(x) = \frac{1}{x^5} + \frac{3}{x^2} + x^{99}$

g) $f(x) = e^x$

h) $f(x) = \sin(x)$

i) $f(x) = \cos(x)$

j) $f(x) = \frac{1}{2}x - \sin(x) - \frac{1}{3}\cos(x)$

k) $f(x) = \sin(x) - 2e^x$

l) $f(x) = \sin(3x)$

m) $f(x) = \cos\left(\frac{1}{5}x\right)$

n) $f(x) = \sin(2x+5)$

o) $f(x) = e^{3x+5}$

o) $f(x) = \cos(-x-8)$

p) $f(x) = -\sin\left(\frac{1}{2}x + 19\right)$

Mit Hilfe dieser Stammfunktion kann also der Flächeninhalt zwischen dem Schaubild einer Funktion $f(x)$ und der x-Achse berechnet werden. Der Flächeninhalt des Schaubilds von $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ vom Ursprung bis x ist $F(x) = \frac{1}{8}x^4$.

Der Flächeninhalt von 0 bis 2 ist

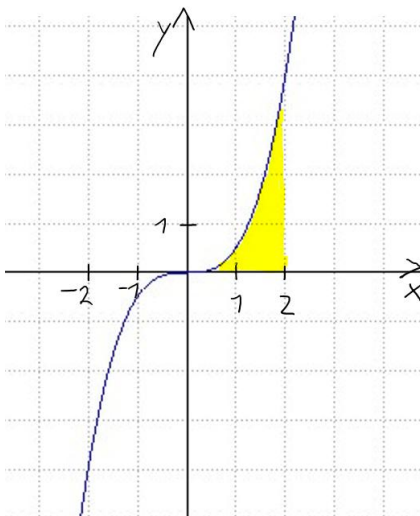
$$F(2) = \frac{1}{8}2^4 = 2FE$$

Der Flächeninhalt von 1 bis 2 ist

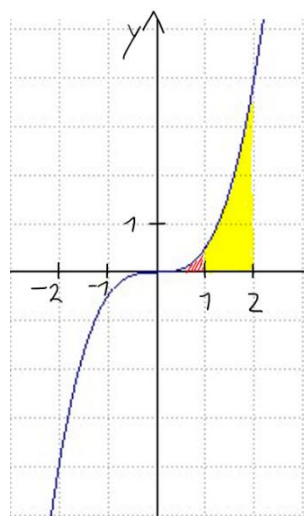
$$F(2) - F(1) = \frac{1}{8}2^4 - \frac{1}{8}1^4 = 1,875FE$$

Der Flächeninhalt von -1 bis 2 ist

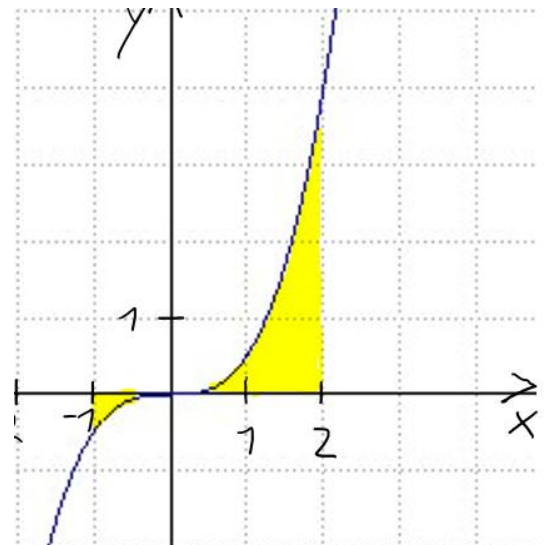
$$F(2) + F(-1) = \frac{1}{8}2^4 + \frac{1}{8}(-1)^4 = 2,125FE$$



$$\int_0^2 \frac{1}{2}x^3 dx = F(2) - F(0)$$



$$\int_1^2 \frac{1}{2}x^3 dx = F(2) - F(1)$$

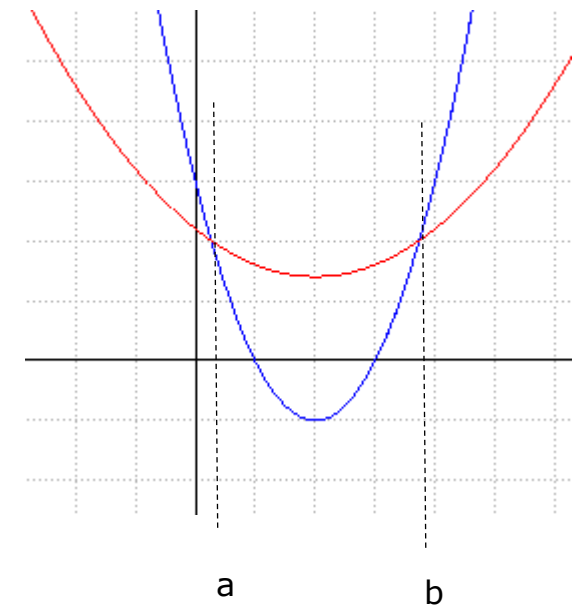
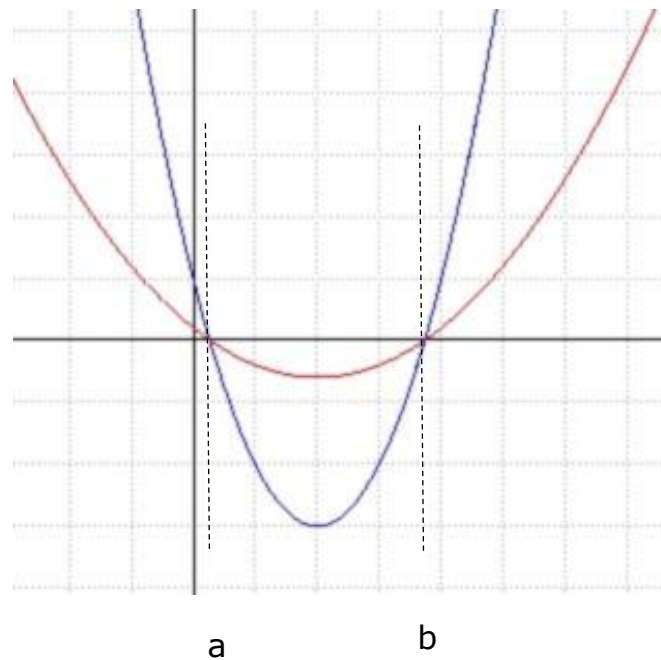
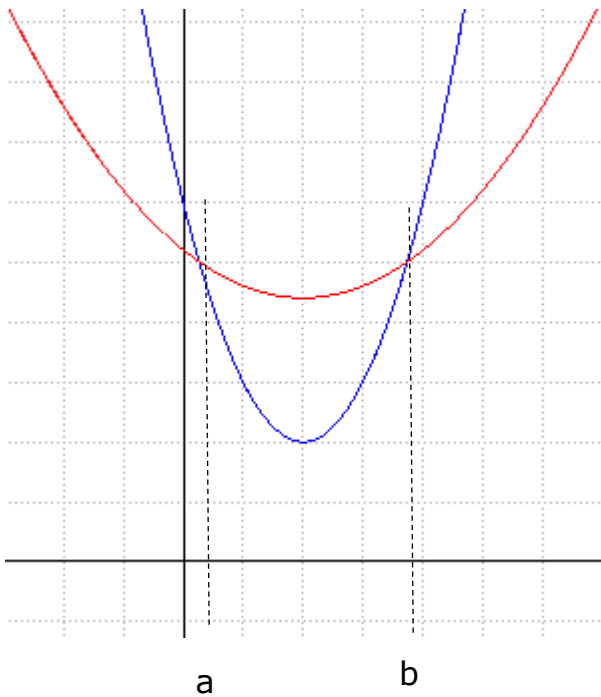


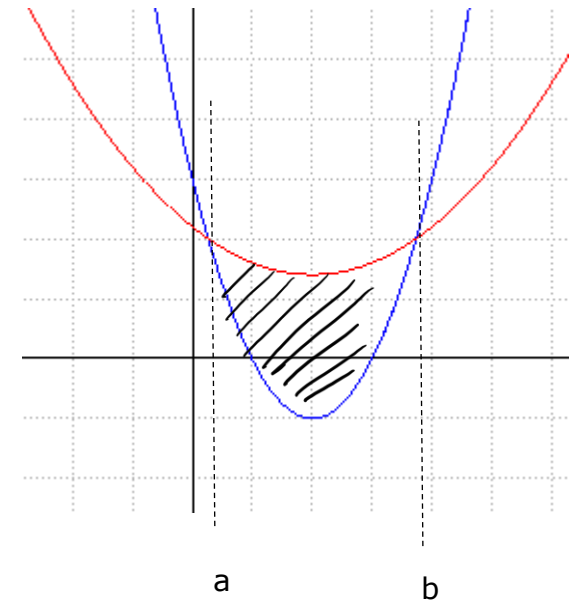
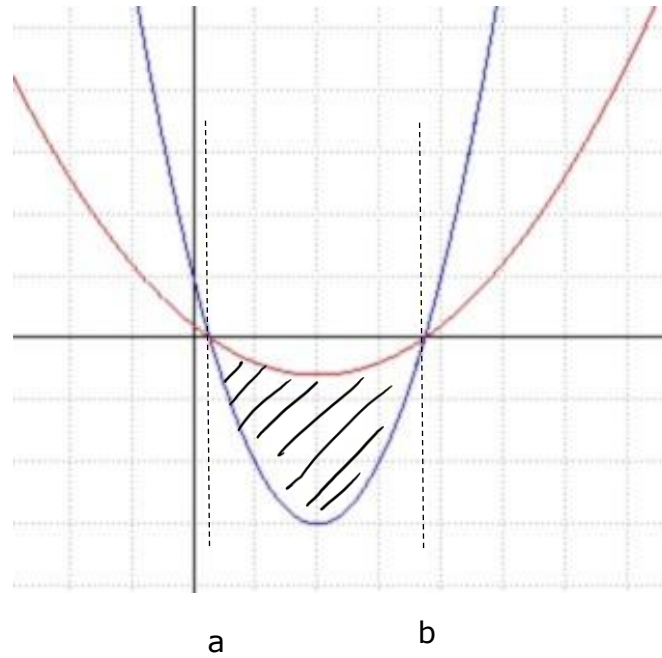
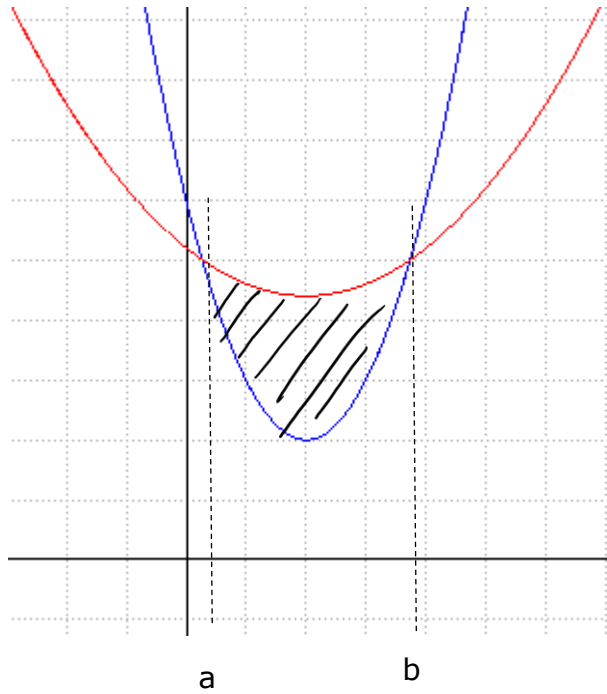
$$-\int_{-1}^0 \frac{1}{2}x^3 dx + \int_0^2 \frac{1}{2}x^3 dx = -F(0) + F(-1) + F(2) - F(0)$$

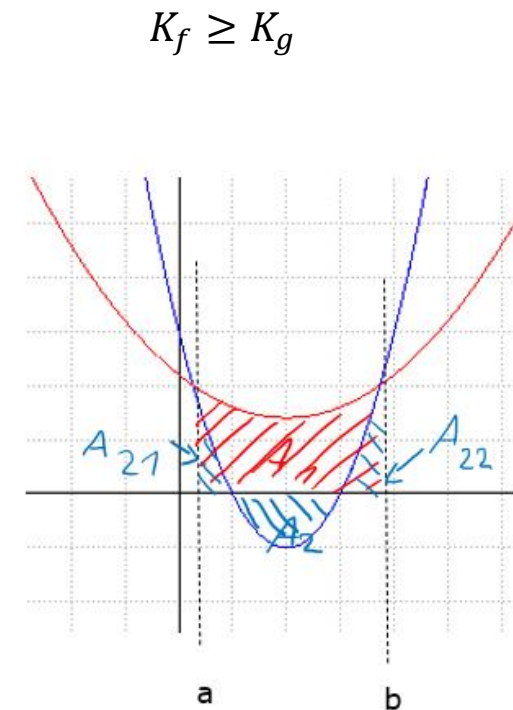
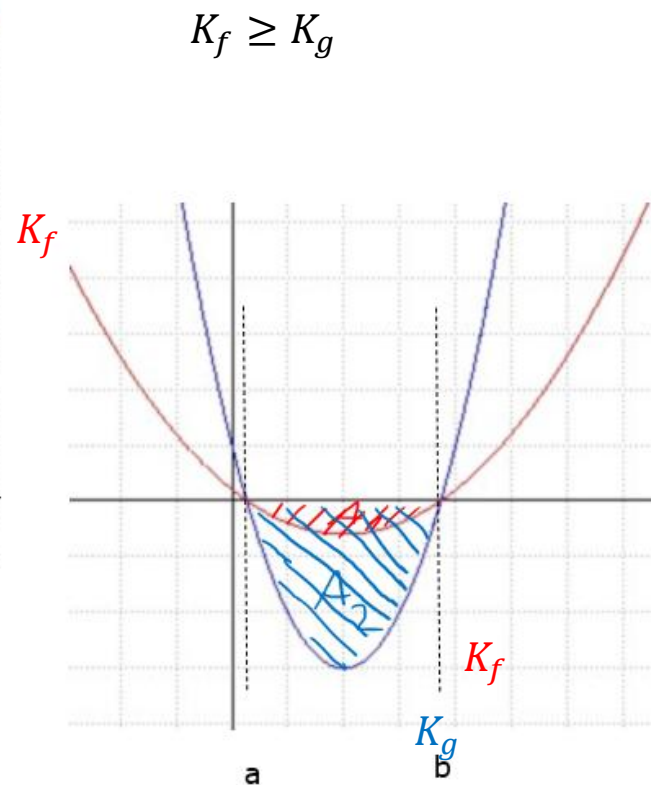
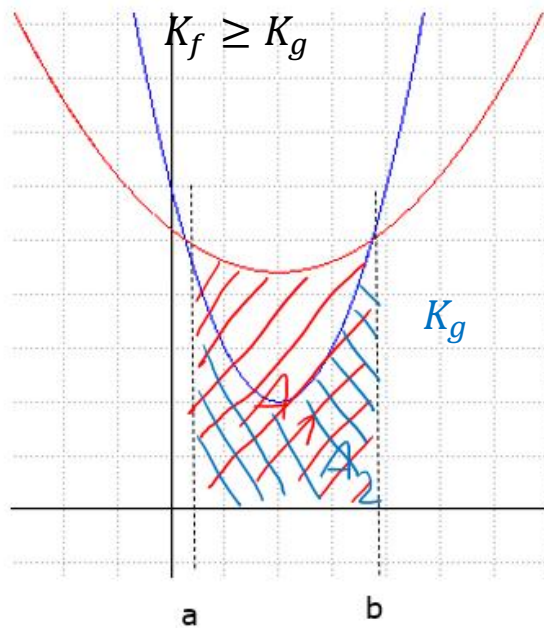
Die Vereinbarung ist so, dass Flächenstücke unterhalb der x-Achse negativ gewertet werden.

Allgemein: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

Wenn in einem Intervall von a bis b auf der x -Achse das Schaubild einer Funktion $f(x)$ oberhalb vom Schaubild von $g(x)$ verläuft, dann erhält man den Flächeninhalt der Fläche zwischen den Schaubildern durch $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$







Das Integral wertet

A_1 positiv und A_2 positiv:

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx = A_1 - A_2$$

$= K_{\text{gesucht}}$

Das Integral wertet

A_1 negativ und A_2 negativ:

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

$$= -A_1 - (-A_2) = A_2 - A_1$$

$= K_{\text{gesucht}}$

Das Integral wertet

A_1 und A_{21} und A_{22} positiv und A_2 negativ:

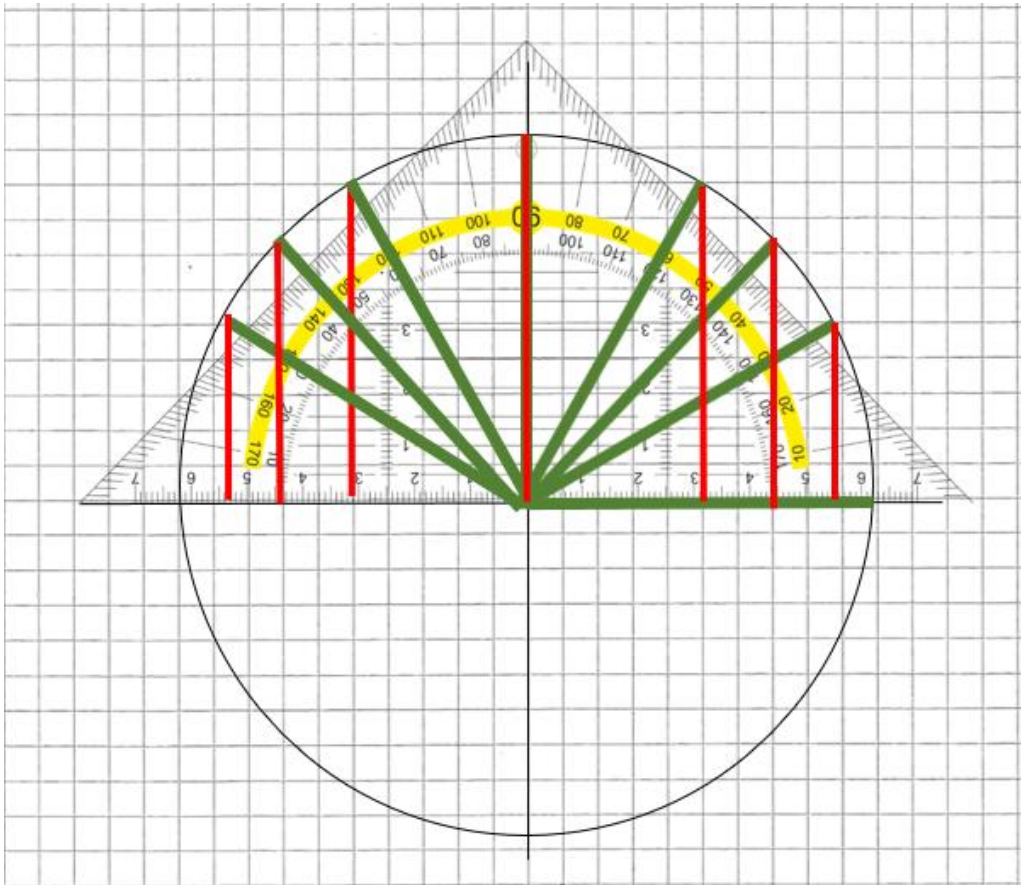
$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

$$= A_1 - A_{21} - A_{22} - (-A_2) = K_{\text{gesucht}}$$

Zum besseren Verständnis messen oder berechnen wir **einige markante Sinuswerte ohne TR**:

Frage: Wie müsste man ein rechtwinkliges Dreieck zeichnen, damit die

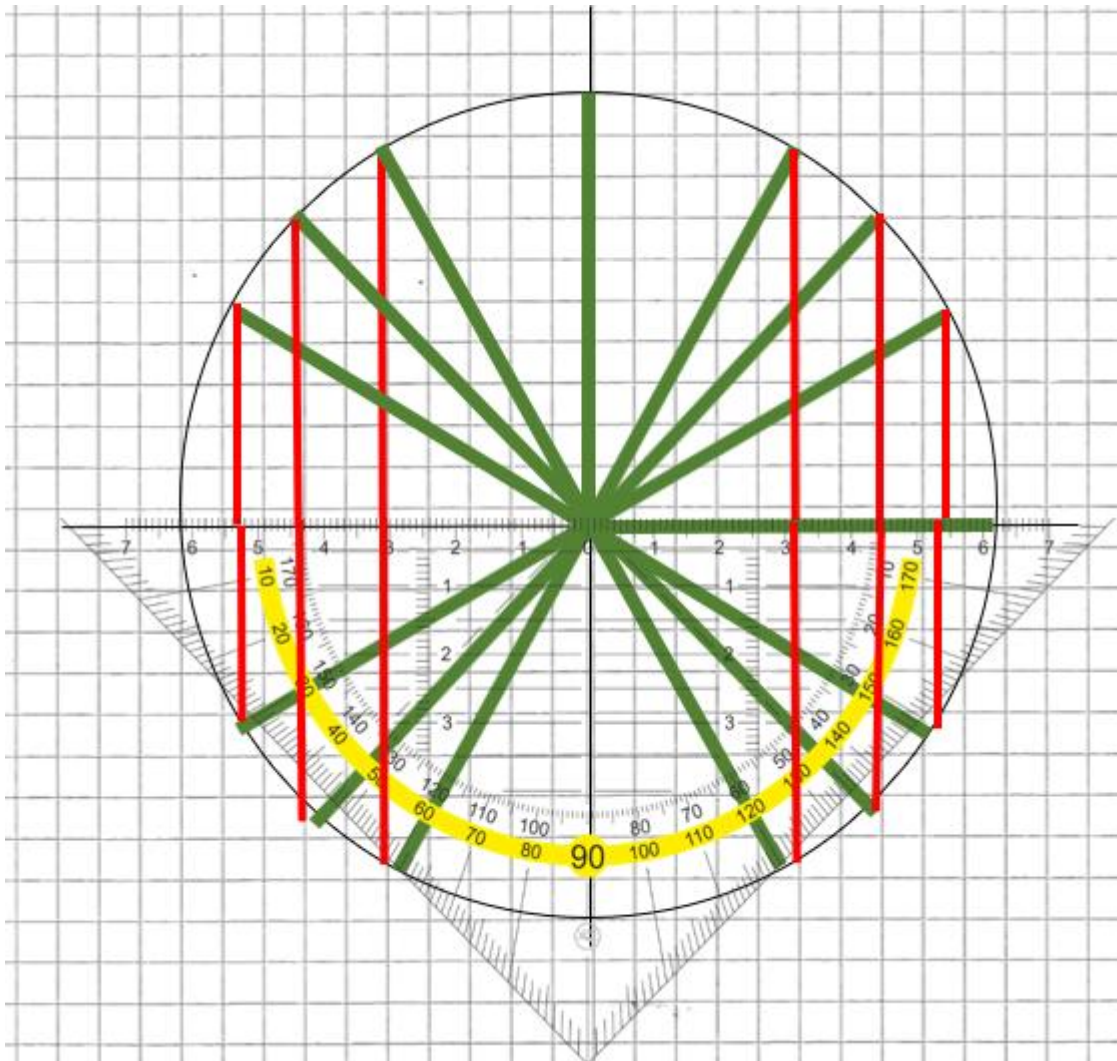
Gegenkathete von α genau die Länge $\sin \alpha$ besitzt? (Antwort hier: 1 Kästchen = 1 mm)



Schätzen Sie die Länge der roten Strecke auf eine Dezimalstelle in cm:

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$					

α	$180^\circ - 0^\circ$	$180^\circ - 30^\circ$	$180^\circ - 45^\circ$	$180^\circ - 60^\circ$
	$=180^\circ$	$=150^\circ$	$=135^\circ$	$=120^\circ$
$\sin \alpha$				



α	$180^\circ + 0^\circ$	$180^\circ + 30^\circ$	$180^\circ + 45^\circ$	$180^\circ + 60^\circ$
	$=180^\circ$	$=210^\circ$	$=225^\circ$	$=240^\circ$
$\sin \alpha$				

α	$360^\circ - 0^\circ$	$360^\circ - 30^\circ$	$360^\circ - 45^\circ$	$360^\circ - 60^\circ$
	$=360^\circ$	$=330^\circ$	$=315^\circ$	$=300^\circ$
$\sin \alpha$				

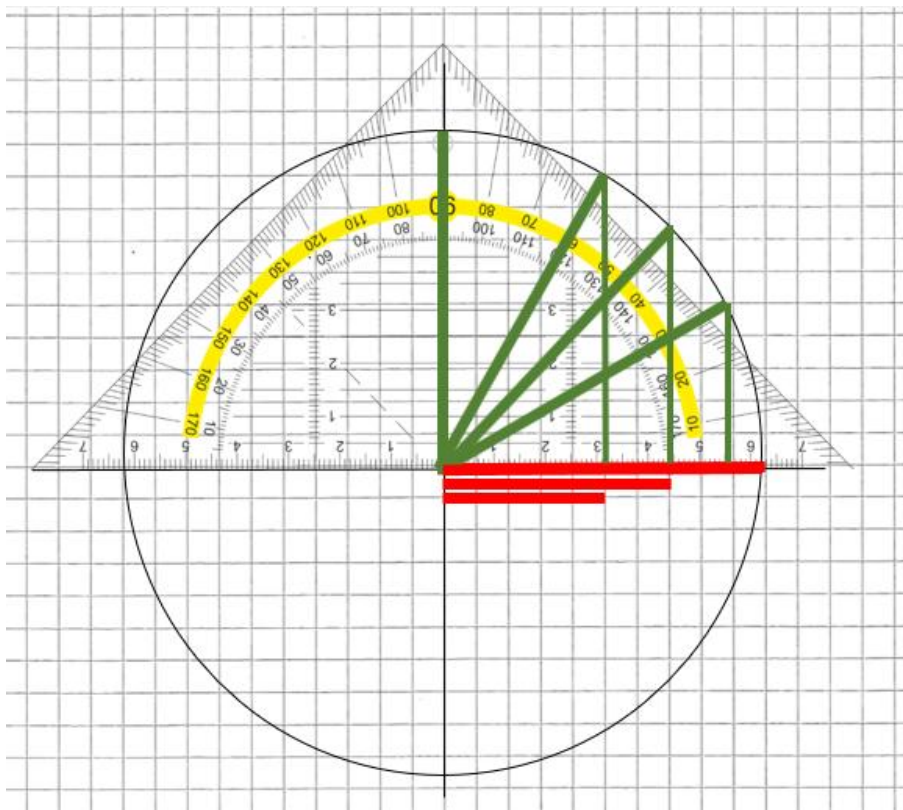
Kosinus eines Winkels α ist definiert als $\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ im rechtwinkligen Dreieck.

Die **Cosinus-Funktion** ordnet jedem Winkel α im rechtwinkligen Dreieck den zugehörigen Cosinuswert $\cos(\alpha)$ zu.

Zum besseren Verständnis messen oder berechnen wir **einige markante Cosinuswerte ohne TR**:

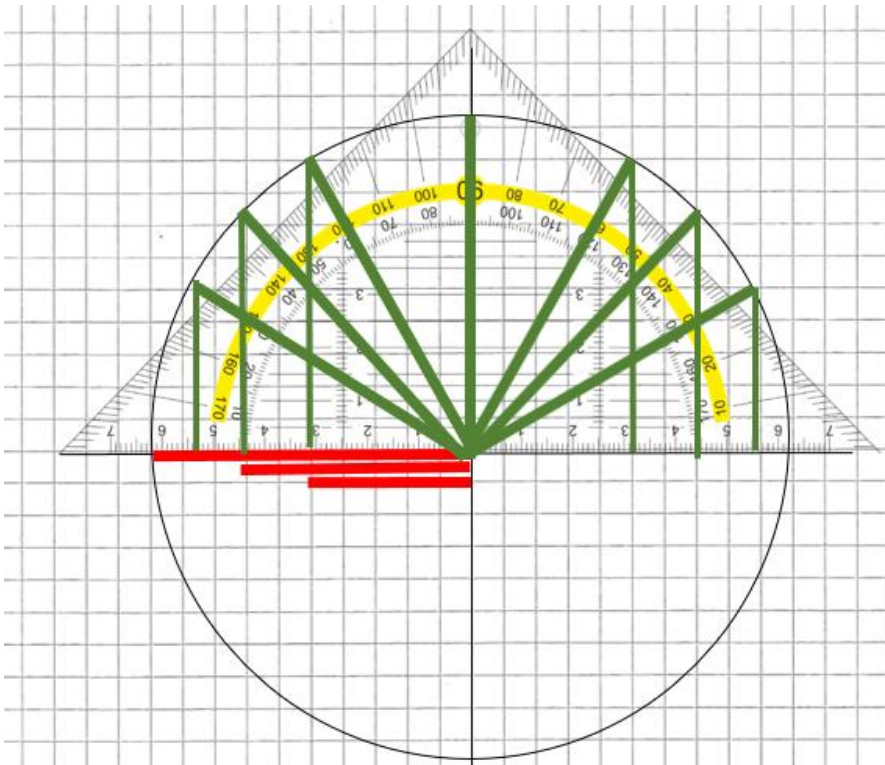
Frage: Wie müsste man ein rechtwinkliges Dreieck zeichnen, damit die Ankathete von α genau die Länge $\cos \alpha$ besitzt?

(Antwort hier: 1 Kästchen = 1 mm)

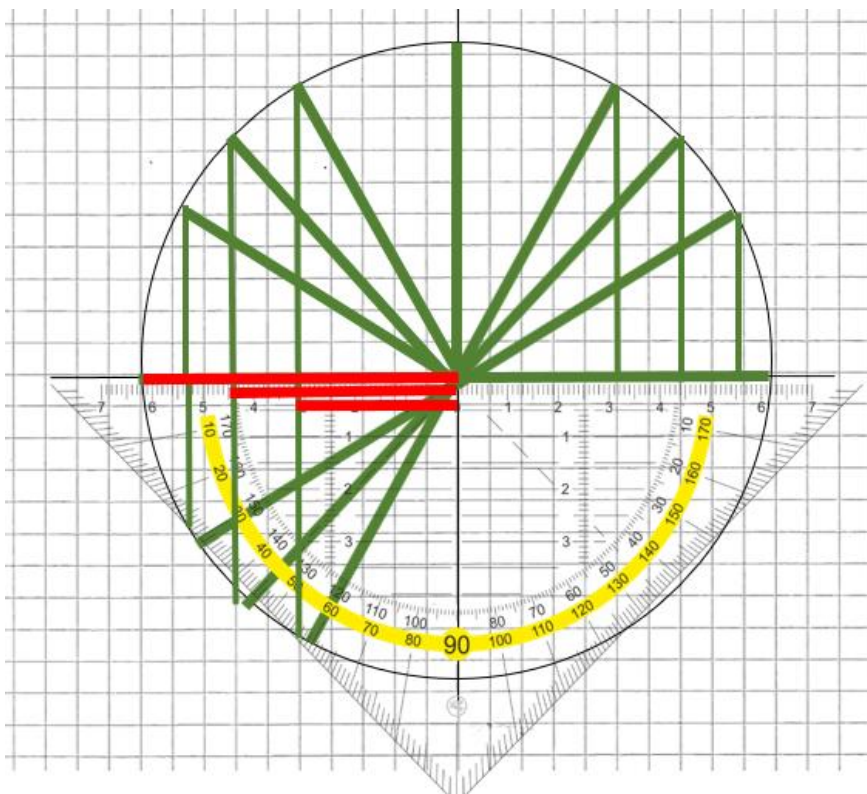


Schätzen Sie die Länge der roten Strecke auf eine Dezimalstelle in cm:

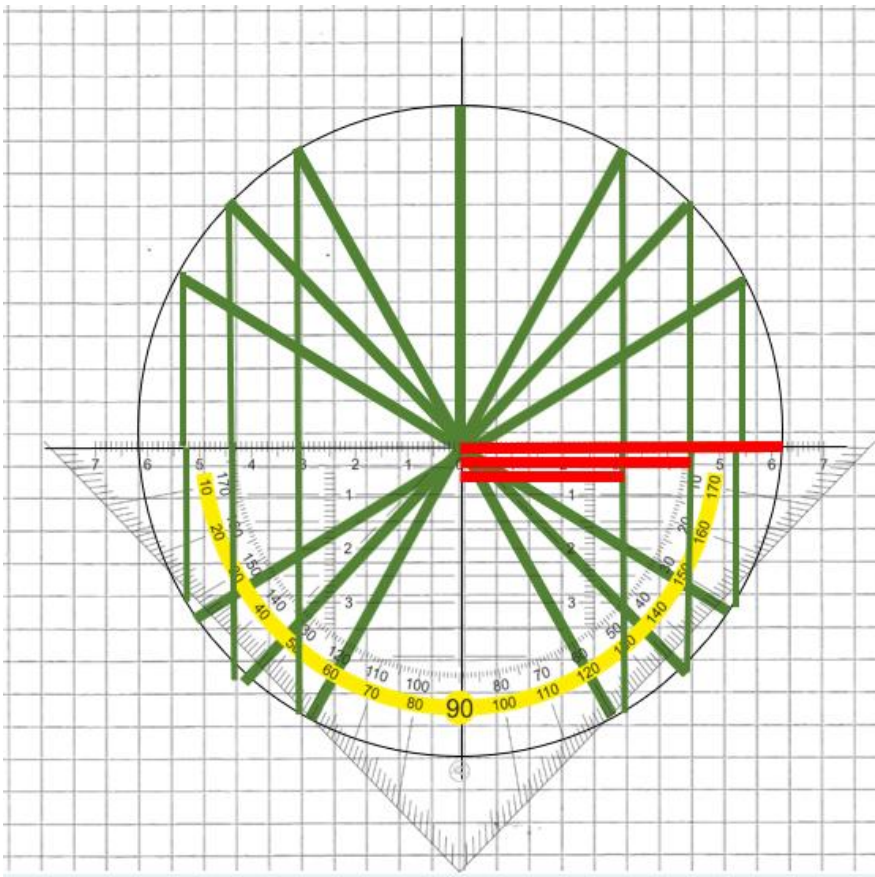
α	0°	30°	45°	60°	90°
$\cos \alpha$					



α	$180^\circ - 0^\circ = 180^\circ$	$180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$	$180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$	$180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
$\cos \alpha$				



α	$180^\circ + 0^\circ = 180^\circ$	$180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$	$180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$	$180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$
$\cos \alpha$				



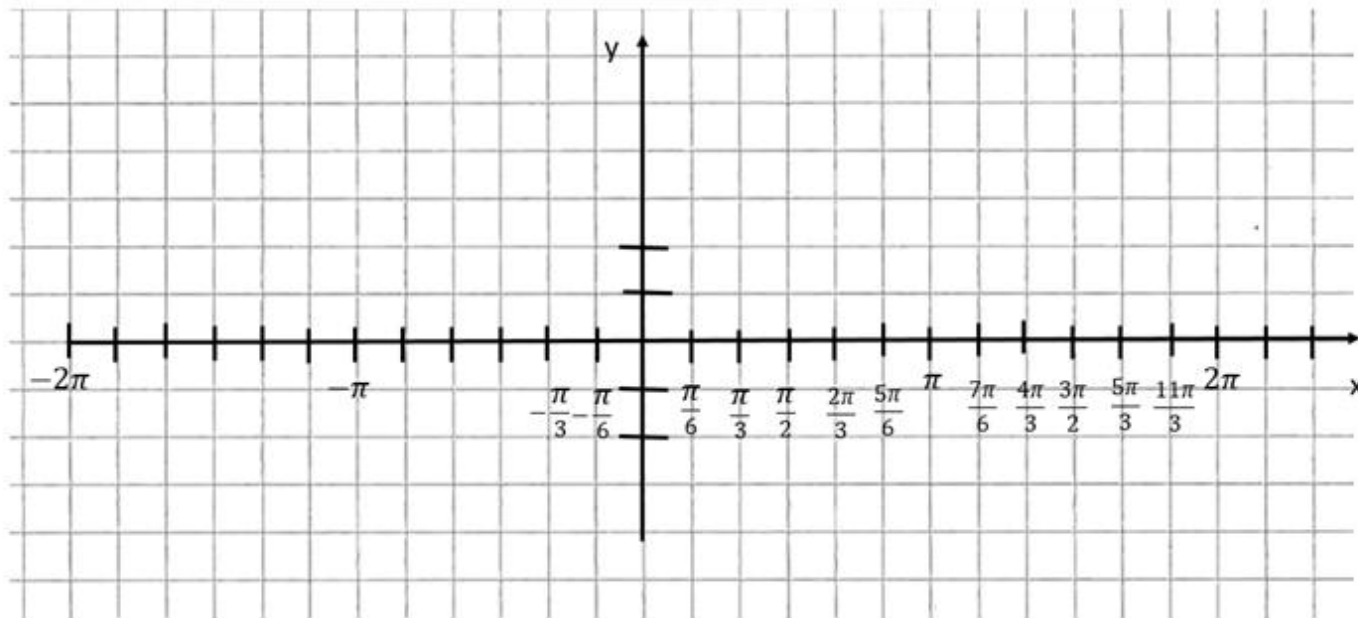
α	$360^\circ - 0^\circ = 360^\circ$	$360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$	$360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$	$360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$
$\cos \alpha$				

Zeichnen Sie die Sinusfunktion. Die x-Achse gibt üblicherweise die Winkel im Bogenmaß an.

Zum Zeichnen hilft Ihnen der Sinuswert als Dezimalzahl in der Tabelle.

Das Schaubild der (allgemeinen) Sinusfunktion

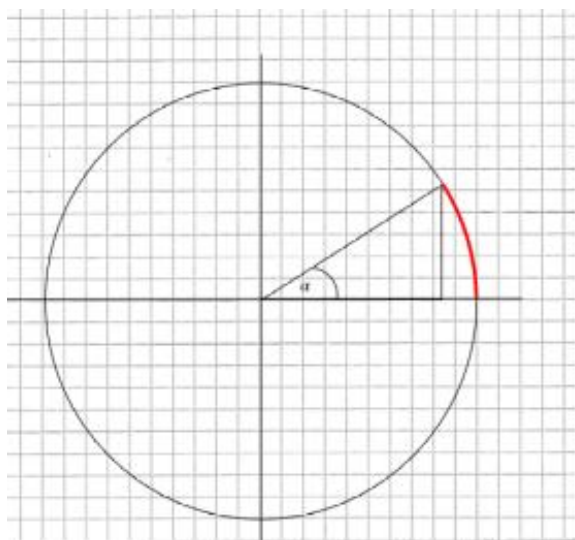
Achtung: Es ist praktisch, auf der x-Achse $\frac{\pi}{6}$ für ein Kästchen zu wählen.



Winkel α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Bogenlänge	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\sin \alpha$	0	0,5	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0,5	0
$\sin \alpha$ als Dezimalzahl	0	0,5	0,7	0,8	1	0,8	0,7	0,5	0

Um auch als Definitionsmenge reelle Zahlen zu haben, kann man die Winkel vom Gradmaß in das Bogenmaß umrechnen:

Dabei entspricht das Gradmaß des Winkels der Länge des zugehörigen Bogens am Einheitskreis (des Kreises mit Durchmesser 1LE)



(1 Kästchen sein 0,1LE)

Das Berechnen der Bogenlänge funktioniert mit der Verhältnisgleichung (Dreisatz) $\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{x}{2\pi}$ oder eben $x = \frac{\alpha \cdot 2\pi}{360^\circ}$. Berechnen Sie mit dem Taschenrechner und geben Sie die Werte auf eine Nachkommastelle gerundet ein.

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Länge des zugehörigen Bogens am Einheitskreis								

Folgende Überlegung kann auch die Länge des Bogenmaßes zu einigen besonders häufig genutzten Winkel liefern:

Der volle Kreis mit 360° entspricht einer Bogenlänge von 2π . Der halbe Kreis mit 180° entspricht einer Bogenlänge von π . Füllen Sie diese Tabelle mit dieser Überlegung ohne Taschenrechner aus:

Besondere Werte von Sinus:

Winkel	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Bogenlänge	0								

Mit dem Taschenrechner haben Sie nun zwei Möglichkeiten. Entweder stellen Sie das Bogenmaß ein und berechnen damit sin für z.B. . Oder Sie stellen das Gradmaß ein und berechnen sin für 30°.

Winkel	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Bogenlänge	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
sin als Dezimalzahl									

Der Taschenrechner kann das Ergebnis für sin auch als Bruch liefern:

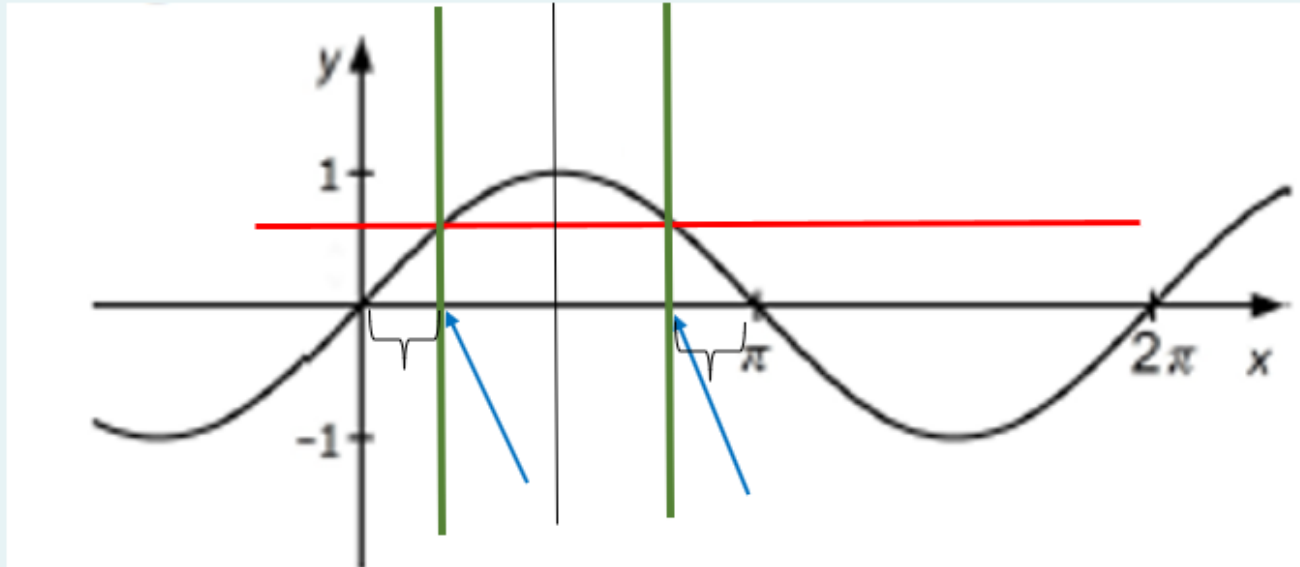
Winkel	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Bogenlänge	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
sin als Bruchzahl									

1)

Ausgangssituation hier:

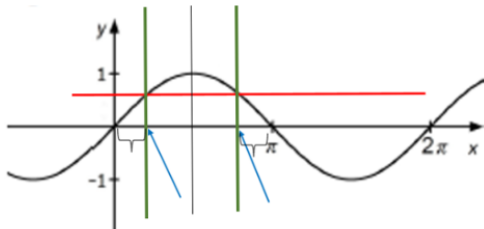
Die Gleichung ist umgeformt zu $\sin(x) =$ eine Zahl 0 und 1 ; der WTR steht auf

Beispiel: $\sin(x)=0,6$



2)

Es reicht, die beiden Stellen im Intervall $[0;\pi]$ zu finden,
denn alle weiteren ergeben sich durch addieren von Vielfachen von 2π



(erster Fall, der angegebene y-Wert ist positiv, hier 0,6)

Beispiel: $\sin(x)=0,6$

1) Der Taschenrechner (Achtung: Bogenmaß benutzen) nennt immer eine Lösung im Intervall $[0;\pi]$.

$$x_1 = \sin^{-1}(0,6)$$

= dies ist eine der beiden Stellen (auf der x-Achse).

2) Die zweite Stelle liegt aus Symmetriegründen bei $\pi - \sin^{-1}(0,6)$

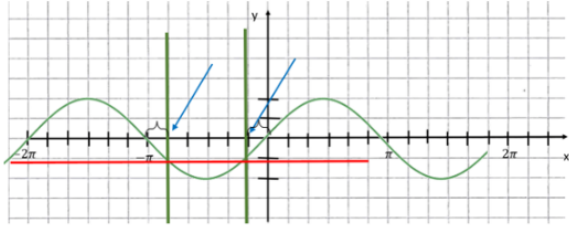
$$x_2 = \pi - \sin^{-1}(0,6)$$

=

3) Zu den beiden Stellen x_1 und x_2 können wir nun jeweils so oft 2π addieren (oder abziehen), bis wir im von der Aufgabe gewünschten Intervall liegen.

3)

Es reicht, die beiden Stellen im Intervall $[0; \pi]$ zu finden,
denn alle weiteren ergeben sich durch addieren von Vielfachen von 2π



(erster Fall, der angegebene y-Wert ist negativ, hier -0,6)

Beispiel: $\sin(x) = -0,6$

1) Der Taschenrechner (Achtung: Bogenmaß benutzen) nennt immer eine Lösung im Intervall $[-\pi; 0]$.

$$x_1 = \sin^{-1}(-0,6)$$

= dies ist eine der beiden Stellen (auf der x-Achse).

2) Die zweite Stelle liegt aus Symmetriegründen bei $x_2 = -\pi - \sin^{-1}(0,6)$

=

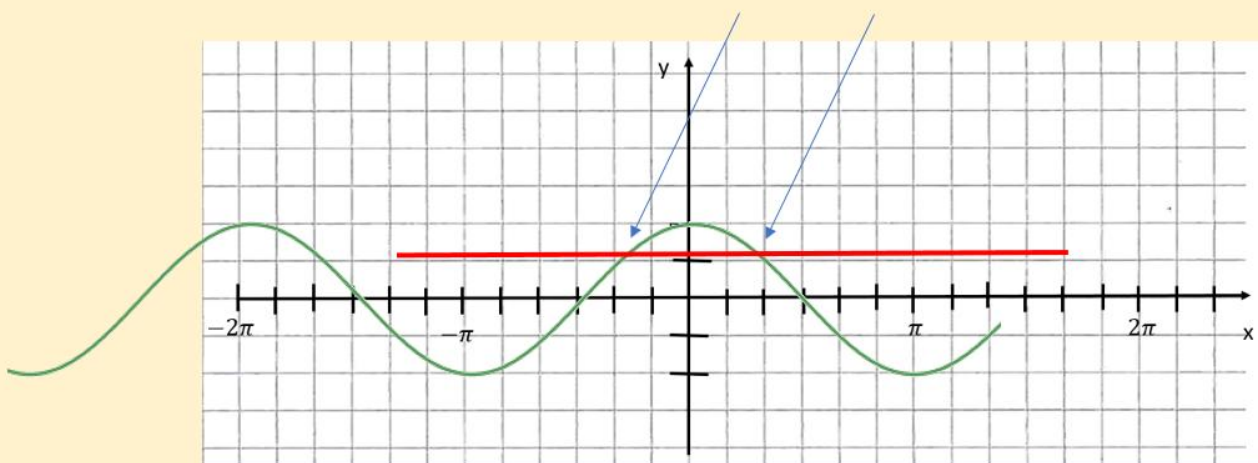
3) Zu den beiden Stellen x_1 und x_2 können wir nun jeweils so oft 2π addieren (oder abziehen), bis wir im von der Aufgabe gewünschten Intervall liegen.

4)

Ausgangssituation hier:

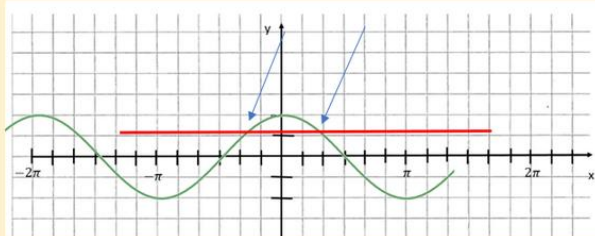
Die Gleichung ist umgeformt zu $\cos(x) = \text{eine Zahl 0 und 1}$; der WTR steht auf

Beispiel: $\cos(x) = 0,6$



5)

Es reicht, die beiden Stellen im Intervall $[0;\pi]$ zu finden,
denn alle weiteren ergeben sich durch addieren von Vielfachen von 2π



(erster Fall, der angegebene y-Wert ist positiv,
hier 0,6)

Beispiel: $\cos(x)=0,6$

1) Der Taschenrechner (Achtung: Bogenmaß benutzen) nennt immer eine Lösung im Intervall $[0;\pi]$.

$$x_1 = \cos^{-1}(0,6)$$

= dies ist eine der beiden Stellen (auf der x-Achse).

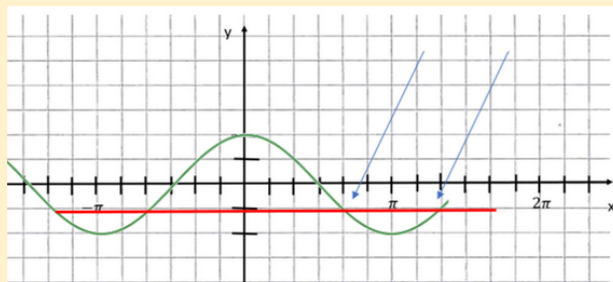
2) Die zweite Stelle liegt aus Symmetriegründen bei $x_2 = -\cos^{-1}(0,6)$

=

3) Zu den beiden Stellen x_1 und x_2 können wir nun jeweils so oft 2π addieren (oder abziehen),
bis wir im von der Aufgabe gewünschten Intervall liegen.

6)

Es reicht, die beiden Stellen im Intervall $[0;\pi]$ zu finden,
denn alle weiteren ergeben sich durch addieren von Vielfachen von 2π



(zweiter Fall, der angegebene y-Wert ist positiv,
hier -0,6)

Beispiel: $\cos(x)=-0,6$

1) Der Taschenrechner (Achtung: Bogenmaß benutzen) nennt immer eine Lösung im Intervall $[0;\pi]$.

$$x_1 = \cos^{-1}(-0,6)$$

= dies ist eine der beiden Stellen (auf der x-Achse).

2) Die zweite Stelle liegt aus Symmetriegründen bei

$$x_2 = \pi - (\cos^{-1}(0,6) - \pi) = 2\pi - \cos^{-1}(0,6) = 2\pi - 2,2143$$

=

3) Zu den beiden Stellen x_1 und x_2 können wir nun jeweils so oft 2π addieren (oder abziehen),
bis wir im von der Aufgabe gewünschten Intervall liegen.

1)

$$x^4 - x^2 - 2 = 0$$

$$\text{Substitution: } x^2 = u$$

$$u^2 - u - 2 = 0$$

$$u_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm 1,5$$

$$u_1 = 2 \quad u_2 = -1$$

Rücksubstitution:

$$x^2 = 2 \quad \text{oder} \quad x^2 = -1$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{2} \quad \text{keine weitere Lösung}$$

2)

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

$$\text{Substitution: } x^2 = u$$

$$u^2 - 13u + 36 = 0$$

$$u_{1,2} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4} - 36} = 6,5 \pm 2,5$$

$$u_1 = 9 \quad u_2 = 4$$

Rücksubstitution:

$$x^2 = 9 \quad \text{oder} \quad x^2 = 4$$

$$x_{1,2} = \pm 3 \quad x_{3,4} = \pm 2$$

3)

$$x^6 + 19x^3 - 216 = 0$$

$$\text{Substitution: } x^3 = u$$

$$u^2 + 19u - 216 = 0$$

$$u_{1,2} = -\frac{19}{2} \pm \sqrt{\frac{361}{4} + 216} = -9,5 \pm 17,5$$

$$u_1 = 9 \quad u_2 = 4$$

Rücksubstitution:

$$x^3 = 8 \quad \text{oder} \quad x^3 = -27$$

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -3$$

4)

$$x^6 - 61x^3 - 8000 = 0$$

$$\text{Substitution: } x^3 = u$$

$$u^2 - 61u - 8000 = 0$$

$$u_{1,2} = \frac{61}{2} \pm \sqrt{\frac{3721}{4} + 8000} = 30,5 \pm 94,5$$

$$u_1 = 125 \quad u_2 = -64$$

Rücksubstitution:

$$x^3 = 125 \quad \text{oder} \quad x^3 = -64$$

$$x_1 = 5 \quad x_2 = -4$$

5)

$$e^{2x} + e^x - 2 = 0$$

$$\text{Substitution: } e^x = u$$

$$u^2 + u - 2 = 0$$

$$u_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -0,5 \pm 1,5$$

$$u_1 = 1 \quad u_2 = -2$$

Rücksubstitution:

$$e^x = 1 \quad \text{oder} \quad e^x = -2$$

$$x_1 = \ln 1 = 0 \quad \text{keine weitere Lösung}$$

6)

$$e^{2x} - 6e^x + 8 = 0$$

$$\text{Substitution: } e^x = u$$

$$u^2 - 6u + 8 = 0$$

$$u_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 8} = 3 \pm 1$$

$$u_1 = 2 \quad u_2 = 4$$

Rücksubstitution:

$$e^x = 2 \quad \text{oder} \quad e^x = 4$$

$$x_1 = \ln 2 \quad x_1 = \ln 4$$

7)

Welche Lösungen bietet der WTR an?

$$\sin^2(x) - 1,5 \sin(x) + 0,5 = 0$$

Substitution: $\sin(x) = u$

$$u^2 - 1,5u + 0,5 = 0$$

$$u_{1,2} = \frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{8}{16}} = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}$$

$$u_1 = 1 \quad u_2 = 0,5$$

Rücksubstitution:

$$\sin(x) = 1 \quad \text{oder} \quad \sin(x) = 0,5$$

$$x_1 = 0 \quad x_1 \approx 0,52$$

8)

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \frac{1}{x} - 2 = 0$$

Substitution: $x^2 = u$

$$u^2 - u - 2 = 0$$

$$u_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm 1,5$$

$$u_1 = 2 \quad u_2 = -1$$

$$\text{Rücksubstitution: } \frac{1}{x} = 2 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{x} = -1$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \quad x_2 = -1$$

9)

$$(\ln(x))^2 - e^2 = 0$$

$$\text{Substitution: } \ln(x) = u$$

$$u^2 - e^2 = 0$$

$$u^2 = e^2$$

$$u_{1,2} = \pm e$$

$$u_1 = e \quad u_2 = -e$$

Rücksubstitution:

$$\ln(x) = e \quad \text{oder} \quad \ln(x) = -e$$

$$x_1 = 1 \quad \text{keine weitere Nullstelle}$$

10)

$$x^4 + 96x^2 - 400 = 0$$

$$\text{Substitution: } x^2 = u$$

$$u^2 + 96u - 400 = 0$$

$$u_{1,2} = -48 \pm \sqrt{2304 + 400} = -48 \pm 52$$

$$u_1 = 4 \quad u_2 = -100$$

Rücksubstitution:

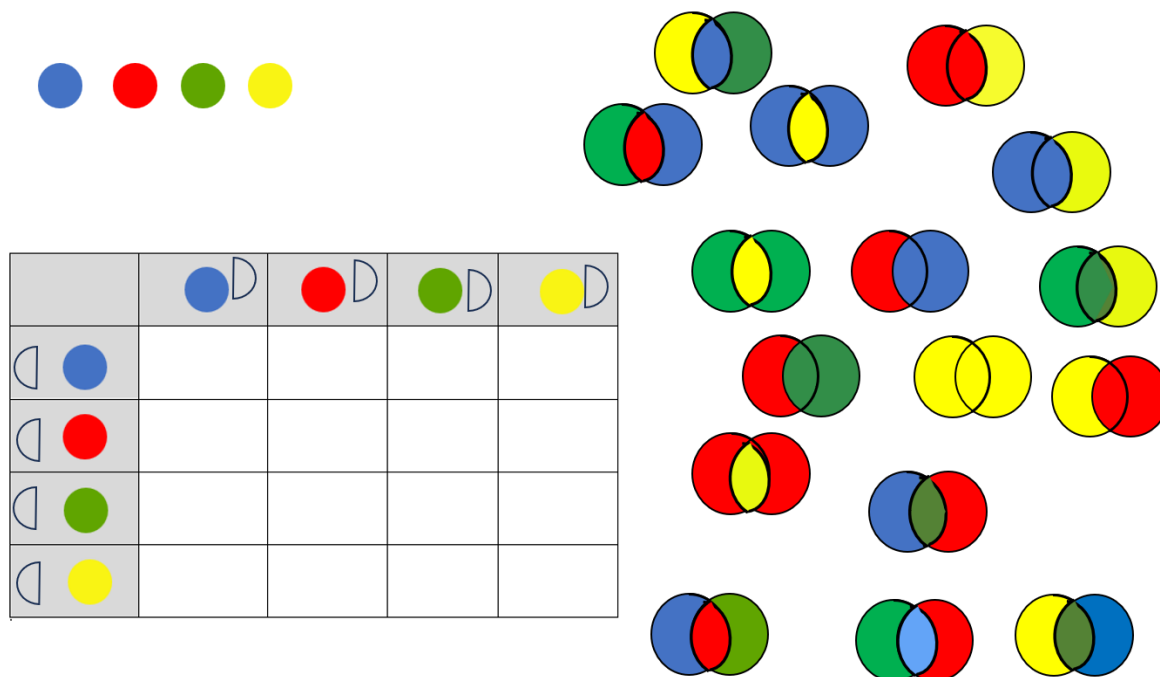
$$x^2 = 4 \quad \text{oder} \quad x^2 = -100$$

$$x_{1,2} = \pm 2 \quad \text{keine weitere Lösung}$$

1) Verknüpfen von Elementen von Mengen.

Eine Verknüpfung kann man definieren, wie man möchte. Oft ist interessant zu untersuchen, ob die Menge ein neutrales Element bezüglich dieser Verknüpfung enthält oder ob es zu jedem Element der Menge ein inverses Element gibt.

Hier ist ein erfundenes Beispiel einer Verknüpfung auf einer Menge von Farbkreisen. Beim Verknüpfen zweier Farbkreise soll die Farbe in der Schnittmenge des nebenstehenden Bildes das Ergebnis sein.



	Blue	Red	Green	Yellow
Blue	Yellow	Green	Red	Blue
Red	Blue	Yellow	Green	Red
Green	Red	Blue	Yellow	Green
Yellow	Green	Red	Blue	Yellow

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad g(x) = \frac{2x+5}{3x-7} \quad h(x) = \sqrt{x} \quad i(x) = \frac{1}{x}$$

$$j(x) = 3x^4 + 5x^2 \quad k(x) = x^5 + x^3 \quad l(x) = \sin(x) \quad m(x) = \cos(x)$$

Beispiel:

Für k ist ID=IR,....

- 2) Welche der Funktionen sind achsensymmetrisch oder punktsymmetrisch?
- 3) Geben Sie für die verknüpften Funktionen den vereinfachten Funktionsterm an und entscheiden Sie, ob es sich um achsensymmetrische (a) oder punktsymmetrische (p) Funktionen handelt. Benutzen Sie dafür eventuell Geogebra

	a	p		a	p
$(j+m)(x) =$			$(l+k)(x) =$		
$(j-m)(x) =$			$(l-k)(x) =$		
$(j \cdot m)(x) =$			$(l \cdot k)(x) =$		
$j(m(x)) =$			$l(k(x)) =$		
$m(j(x)) =$			$k(l(x)) =$		

4)

Abgebildet sehen Sie die Schaubilder K_j und K_k und K_l und K_m

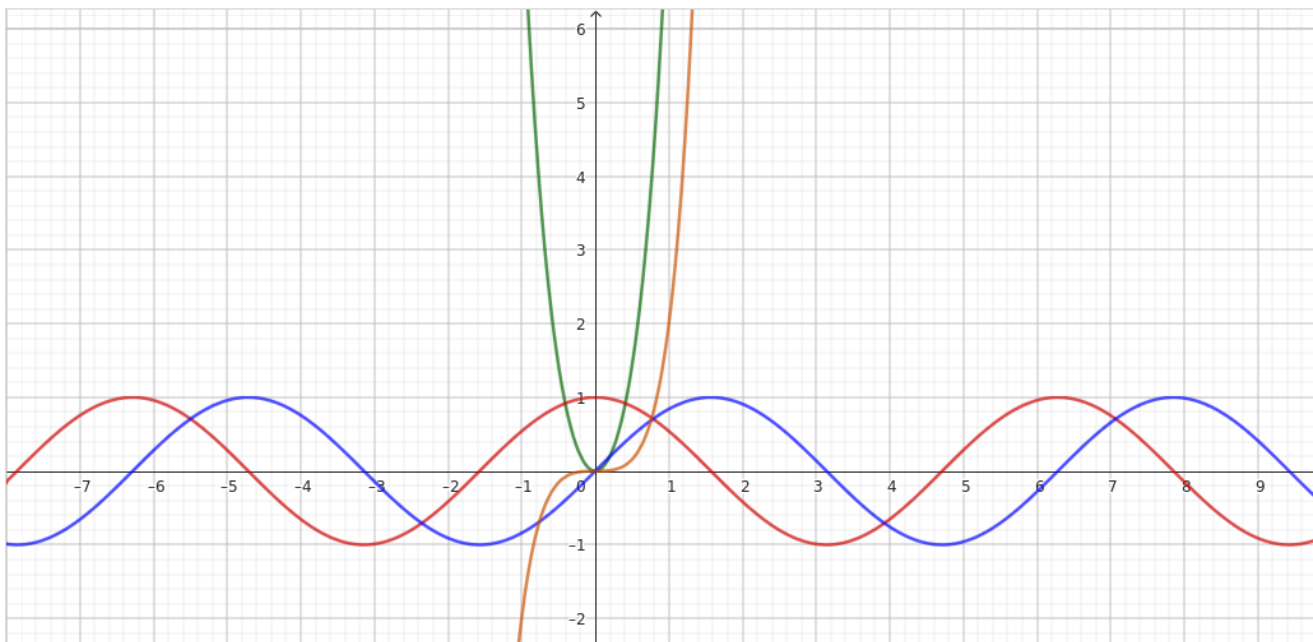
Ordnen Sie die Farben (grün, orange, rot, blau) zu:

Das Schaubild von K_j ist ...

Das Schaubild von K_k ist ...

Das Schaubild von K_l ist ...

Das Schaubild von K_m ist ...



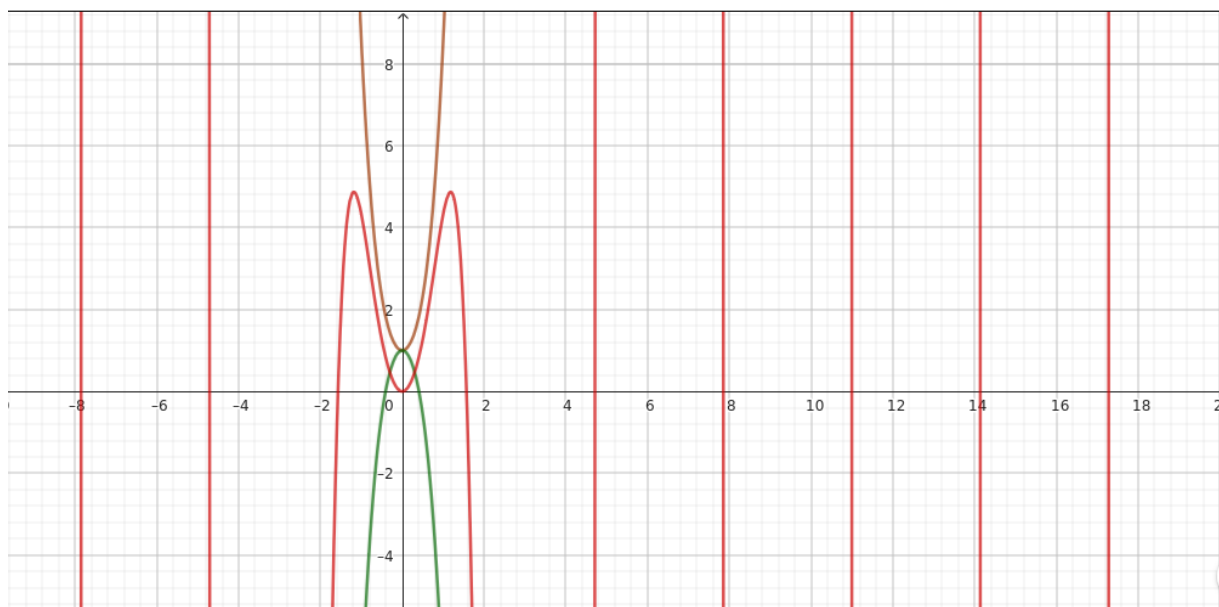
5) Abgebildet sehen Sie die Schaubilder K_{j+m} und K_{j-m} und $K_{m \cdot j}$

Ordnen Sie die Farben (grün, rot, braun) zu:

Das Schaubild von K_{j+m} ist ...

Das Schaubild von $K_{m \cdot j}$ ist ...

Das Schaubild von K_{j-m} ist ...



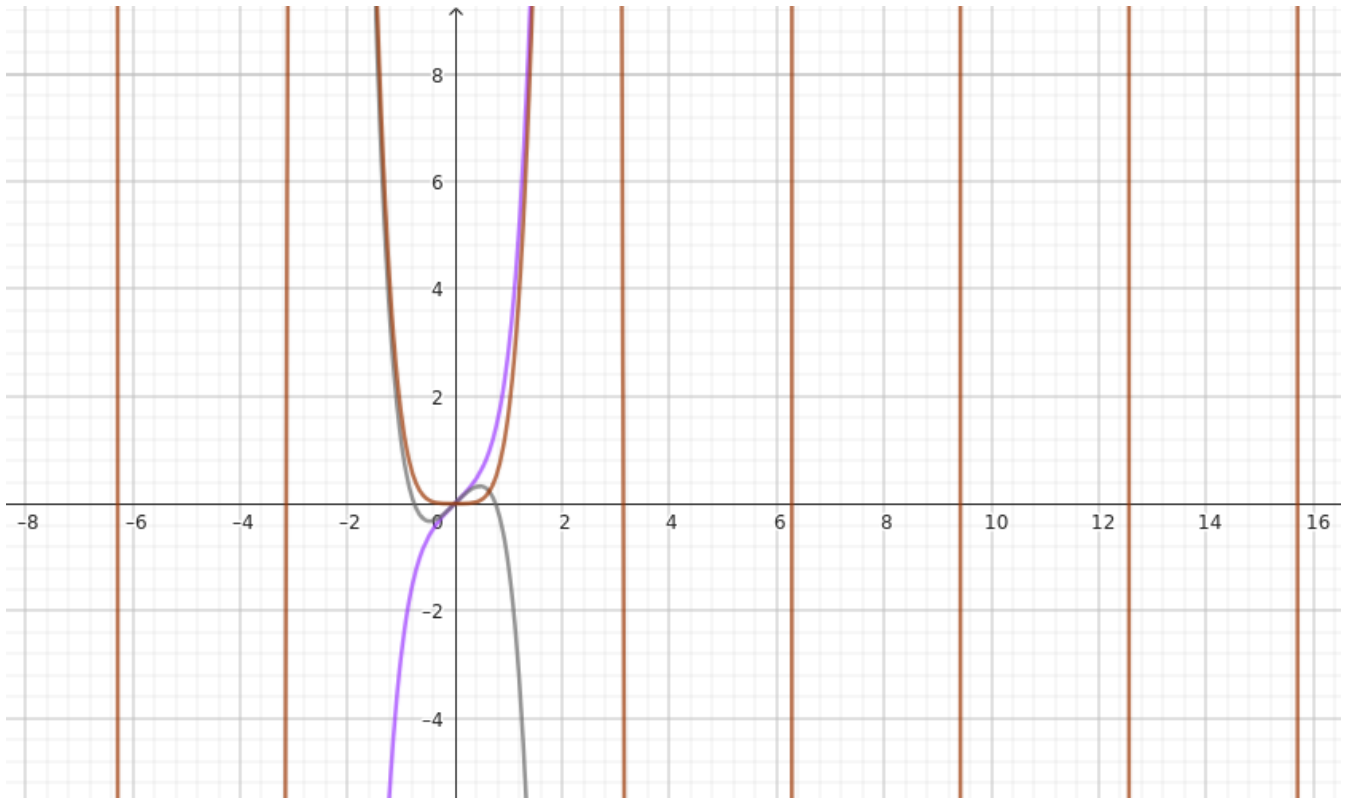
Abgebildet sehen Sie die Schaubilder K_{l+k} und K_{l-k} und $K_{l \cdot k}$

Ordnen Sie die Farben (grau, violett, braun) zu:

Das Schaubild von K_{k+l} ist ...

Das Schaubild von K_{l-k} ist ...

Das Schaubild von $K_{l \cdot k}$ ist ...



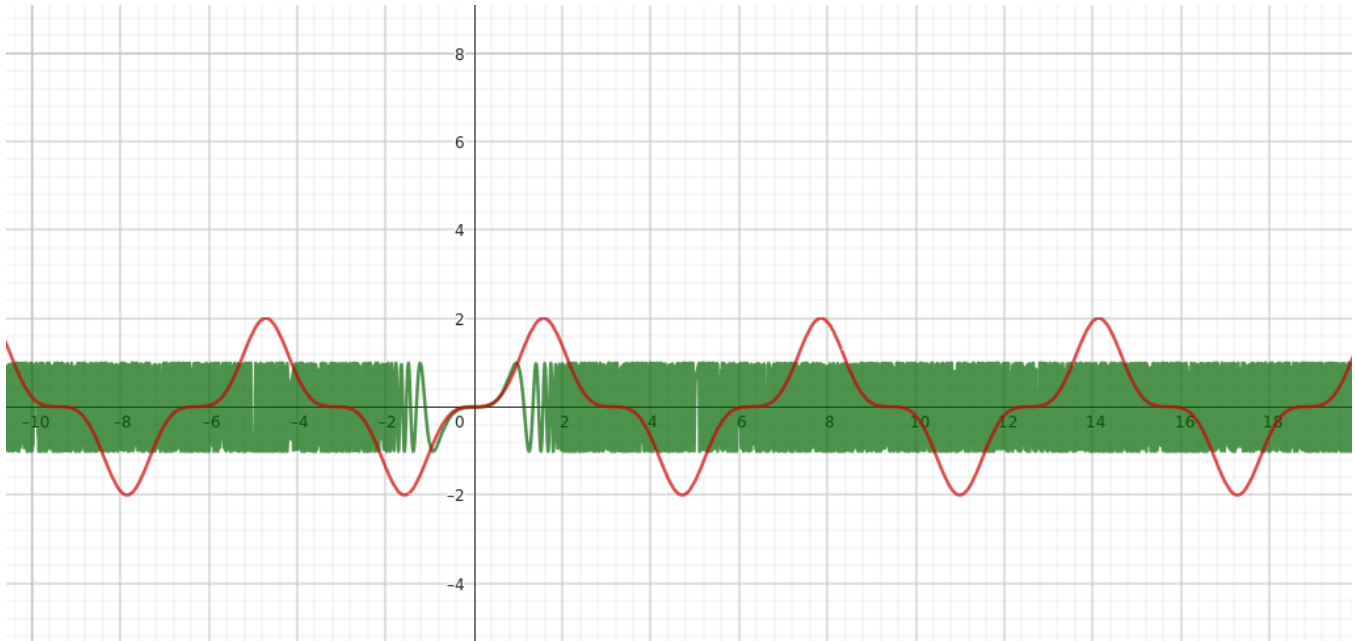
7)

Abgebildet sehen Sie die Schaubilder $K_{l(k)}$ und $K_{k(l)}$

Ordnen Sie die Farben (grün, rot) zu:

Das Schaubild von $K_{l(k)}$ ist ...

Das Schaubild von $K_{k(l)}$ ist ...



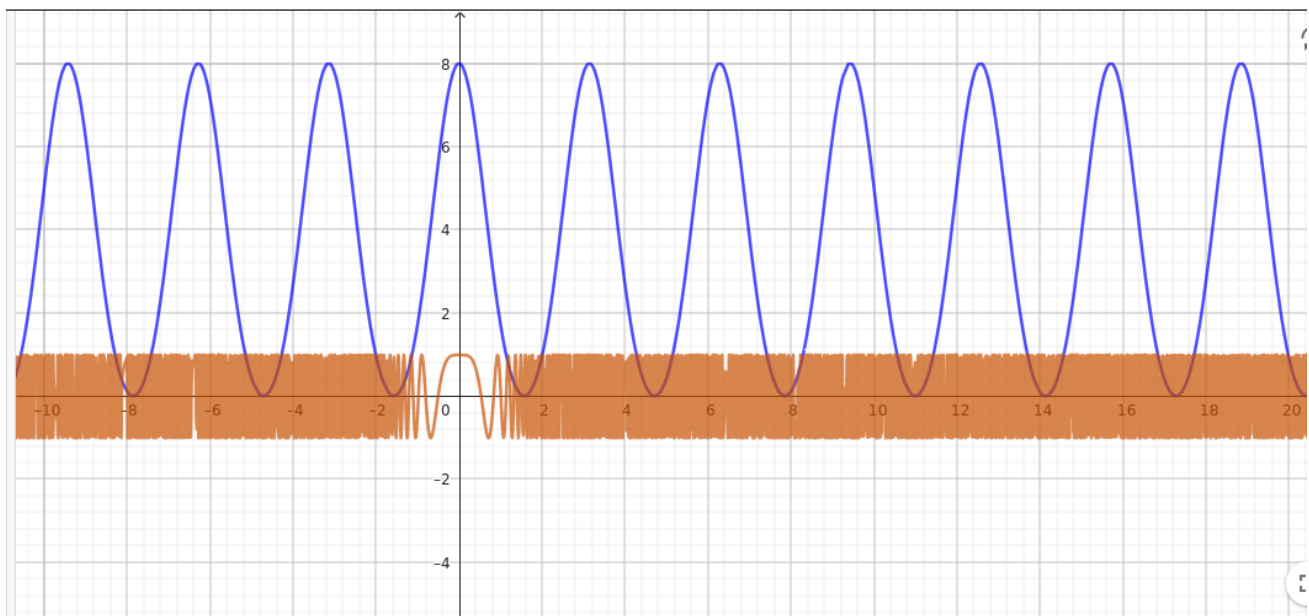
8)

Abgebildet sehen Sie die Schaubilder $K_{m(j)}$ und $K_{j(m)}$

Ordnen Sie die Farben (blau, braun) zu:

Das Schaubild von $K_{m(j)}$ ist ...

Das Schaubild von $K_{j(m)}$ ist ...



Definitionsmenge:

Eine **Funktion** ist eine Abbildung von der **Definitionsmenge (x-Werte)** in die **Wertemenge (y-Werte)**. Dabei wird **jedem** Element der **Definitionsmenge** **genau ein** Element der Wertemenge zugeordnet.

Die x- und y-Achse „bestehen“ aus den reellen Zahlen. Aber evtl. ist die Funktionsvorschrift gar nicht für jede reelle Zahl definiert. Bsp.:

$f(x) = \sqrt{x}$. Hier ist $ID = \mathbb{R}_0^+$ (alle positiven reellen Zahlen mit der Null)

$g(x) = \frac{1}{x}$ Hier ist $ID = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (alle reellen Zahlen ohne Null).

Asymptote:

Eine Asymptote ist eine Gerade, an die sich das Schaubild immer mehr „anschmiegt“, ohne es zu berühren. Es gibt waagrechte, senkrechte und schräge Asymptoten.

Kriterien für Symmetrie:

Eine Funktion f ist genau dann **achsensymmetrisch zur y-Achse**, wenn gilt:

- ☐ $f(-x)$ ist gleich $-f(x)$ für alle $x \in ID$ #Falsch
- ☐ $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in ID$

Eine Funktion $f(x)$ ist genau dann punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn gilt:

- ☐ $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in ID$
- ☐ $f(-x)$ ist gleich $-f(x)$ für alle $x \in ID$

Nullstellen ein x-Wert x_0 (also eine Stelle auf der x-Achse) heißt Nullstelle von $f(x)$, wenn gilt $f(x_0) = 0$

Sie finden hier die rechnerischen Beweise zu Aussagen von Symmetriearten verknüpfter Funktionen.

Ordnen Sie den verknüpften Funktionen die untenstehenden Aussagen anhand der entsprechenden Buchstaben zu:

Achsensymmetrie von $f(x) = u(x) + v(x)$ ☐

Achsensymmetrie von $f(x) = u(x) - v(x)$ ☐

Achsensymmetrie von $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ ☐

Achsensymmetrie von $f(x) = u(v(x))$ ☐

Punktsymmetrie von $f(x) = u(x) + v(x)$ ☐

Punktsymmetrie von $f(x) = u(x) - v(x)$ ☐

Punktsymmetrie von $f(x) = u(v(x))$ ☐

a) Angenommen $u(x)$ und $v(x)$ sind achsensymmetrisch zur y -Achse, dann ist $f(x) = u(x) + v(x) = u(-x) + v(-x) = f(-x)$.

b) Angenommen $u(x)$ und $v(x)$ sind achsensymmetrisch zur y -Achse, dann ist $f(x) = u(x) \cdot v(x) = u(-x) \cdot v(-x) = f(-x)$.

c) Angenommen $u(x)$ und $v(x)$ sind punktsymmetrisch zur y -Achse, dann ist $f(-x) = u(v(-x)) = u(-v(x)) = -u(v(x)) = -f(x)$.

d) Angenommen $u(x)$ und $v(x)$ sind achsensymmetrisch zur y -Achse, dann ist $f(x) = u(x) - v(x) = u(-x) - v(-x) = f(-x)$.

e) Angenommen $u(x)$ und $v(x)$ sind achsensymmetrisch zur y -Achse, dann ist $f(x) = u(v(x)) = u(v(-x)) = f(-x)$

f) Angenommen $u(x)$ und $v(x)$ sind punktsymmetrisch zur y -Achse, dann ist $f(-x) = u(-x) + v(-x) = -u(x) + -v(x) = -(u(x) + v(x)) = -f(x)$.

g) Angenommen $u(x)$ und $v(x)$ sind punktsymmetrisch zur y -Achse, dann ist $f(-x) = u(-x) - v(-x) = -u(x) - -v(x) = -(u(x) - v(x)) = -f(x)$.

Überlegungen zur Definitionsmenge:

Sei f die verknüpfte Funktion von $u(x)$ und $v(x)$ durch den Term $u(x) + v(x)$ bzw. $u(x) - v(x)$ bzw. $u(x) \cdot v(x)$

Welche Aussagen stimmen?:

Sei f die verknüpfte Funktion von $u(x)$ und $v(x)$
durch den Term $u(v(x))$

Welche Aussage stimmen?:

- a) der Term muss für beide Summanden definiert sein.
- b) Wertemenge von $v(x)$ in der Definitionsmenge von $u(x)$ liegen.
- c) Merke: die Definitionsmenge von $f(x)$ ist die Schnittmenge der Definitionsmengen von $u(x)$ und von $v(x)$. Ebenso für $f(x)=u(x)-v(x)$.
- d) Merke: die Definitionsmenge von $f(x)$ ist die Schnittmenge der Definitionsmengen von $u(x)$ und der Wertemenge der Definitionsmenge von $v(x)$.

1)

Eine Funktion 4ten Grades ist symmetrisch zur y-Achse, hat die beiden Extremstellen $H(-2|1)$ und $H(2|1)$ und schneidet die y-Achse im Punkt $S_y(0|3)$

2)

Eine Funktion 4ten Grades ist symmetrisch zur y-Achse, die Wendetangente im Punkt $W(1|2)$ besitzt die Steigung -2 .

3)

Bestimmen Sie eine Polynomfunktion 5ten Grades, deren Graph punktsymmetrisch zum Ursprung ist und im Ursprung eine waagrechte Tangente besitzt. Der Punkt $P(1|1)$ liegt auf dem Schaubild von f . Die Tangente an K_f im Punkt P hat die Steigung 6 .

4)

Bestimmen Sie eine Polynomfunktion 3ten Grades geht durch den Ursprung, zur Funktion gehört eine Wendetangente mit Steigung 1 im Punkt $W(1|2)$.

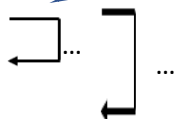
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 10 & -20 & 15 \\ 2 & 9 & 2 & 26 \\ 3 & 6 & -15 & 6 \end{array} \right)$$

|: ...

Das erste Element der ersten Zeile „auf 1 bringen“, d.h. normieren.

Zeile so oft, wie hinter der Klammer angegeben zu der vom Pfeil angezeigten Zeile addieren.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{array} \right)$$



Die erste Zeile geeignet oft zur zweiten und dritten addieren(subtrahieren), so dass nur Nullen unter der 1 entstehen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{array} \right)$$

Das zweite Element der zweiten Zeile „auf 1 bringen“, d.h. normieren.

Achtung: Ist zufällig schon vorhanden!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{array} \right)$$

Die zweite Zeile geeignet oft zur dritten addieren(subtrahieren), so dass nur Nullen unter der 1 entstehen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{array} \right) : \dots$$

Das dritte Element der dritten Zeile „auf 1 bringen“, d.h. normieren.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{array} \right)$$

Die dritte Zeile geeignet oft zur zweiten und ersten addieren(subtrahieren), so dass nur Nullen über der 1 entstehen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{array} \right)$$

Die zweite Zeile geeignet oft zur ersten addieren(subtrahieren), so dass nur Nullen über der 1 entstehen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{array} \right)$$

Das Ergebnis kann abgelesen werden.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -9 & 21 \\ 4 & 10 & -2 & 38 \\ 10 & 22 & -18 & 104 \end{array} \right) \quad | : \dots$$

Das erste Element der ersten Zeile „auf 1 bringen“, d.h. normieren.

Zeile so oft, wie hinter der Klammer angegeben zu der vom Pfeil angezeigten Zeile addieren.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{-3} & \boxed{7} \\ \boxed{4} & \boxed{10} & \boxed{-2} & \boxed{38} \\ \boxed{10} & \boxed{22} & \boxed{-18} & \boxed{104} \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \leftarrow \dots \\ \leftarrow \dots \end{array}$$

Die erste Zeile geeignet oft zur zweiten und dritten addieren(subtrahieren), so dass nur Nullen unter der 1 entstehen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{-3} & \boxed{7} \\ \boxed{0} & \boxed{6} & \boxed{10} & \boxed{26} \\ \boxed{0} & \boxed{2} & \boxed{-6} & \boxed{28} \end{array} \right) \quad | : \dots$$

Das zweite Element der zweiten Zeile „auf 1 bringen“, d.h. normieren.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{-3} & \boxed{7} \\ \boxed{0} & \boxed{6} & \boxed{10} & \boxed{26} \\ \boxed{0} & \boxed{2} & \boxed{-6} & \boxed{28} \end{array} \right) \quad \leftarrow \dots$$

Die zweite Zeile geeignet oft zur dritten addieren(subtrahieren), so dass nur Nullen unter der 1 entstehen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{-3} & \boxed{7} \\ \boxed{0} & \boxed{6} & \boxed{10} & \boxed{26} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-2} & \boxed{14} \end{array} \right) \quad | : \dots$$

Das dritte Element der dritten Zeile „auf 1 bringen“, d.h. normieren.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{-3} & \boxed{7} \\ \boxed{0} & \boxed{6} & \boxed{10} & \boxed{26} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{7} \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \leftarrow \dots \\ \leftarrow \dots \end{array}$$

Die dritte Zeile geeignet oft zur zweiten und ersten addieren(subtrahieren), so dass nur Nullen über der 1 entstehen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{-4} & \boxed{-13} \\ \boxed{0} & \boxed{6} & \boxed{10} & \boxed{26} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{7} \end{array} \right) \quad \leftarrow \dots$$

Die zweite Zeile geeignet oft zur ersten addieren(subtrahieren), so dass nur Nullen über der 1 entstehen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{-4} & \boxed{-13} \\ \boxed{0} & \boxed{6} & \boxed{10} & \boxed{26} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{7} \end{array} \right)$$

Das Ergebnis kann abgelesen werden.

Die Rechenarten $+$ und $\cdot$ kann man auch als Verknüpfungen bezeichnen. Denn man kann je zwei Zahlen (bzw. Elemente einer Menge) mit diesen Verknüpfungen „zu einem neuen Element verbinden“

Beispiel $5 + 3 = 8$ oder $7 \cdot 3 = 21$

Nachfolgend sind einige Gesetze oder Bedingungen aufgezählt, die es geben kann. Je nachdem, welche davon erfüllt sind, erhält das mathematische Gebilde einen eigenen Namen. Für uns sind die Begriffe Körper und Vektorraum wichtig.

Eine nichtleere Menge mit einer assoziativen Verknüpfung $(\cdot)$ ist eine Halbgruppe.

a) Assoziativgesetz

$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (bezüglich $\cdot$) oder $(x + y) + z = x + (y + z)$ (bezüglich $+$)

b) Kommutativgesetz

$x \cdot y = y \cdot x$ (bezüglich $\cdot$) oder $x + y = y + x$ (bezüglich $+$)

d) Neutrales Element

Es gibt ein Element e , so dass $x \cdot e = e \cdot x = x$ für alle x

e) Inverses Element

Zu jedem Element x gibt es ein Element x^{-1} , so dass $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$

c) Distributivgesetze (wenn es zwei verschiedene Verknüpfungen gibt)

$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

$(x+y) \cdot z = xz + xy$

Der Körper der reellen Zahlen:

Aufgabe 1:

- Wählen Sie eine beliebige reelle Zahl (nicht Null) und zeigen Sie für diese Zahl, dass d) und e) erfüllt sind.
- Wählen Sie drei beliebige reelle Zahlen und zeigen Sie a) und b)

Aufgabe 2:

Wiederholen Sie Aufgabe 1 mit der Rechenart $+$

(Anm.: theoretisch dürfte die Zahl hier auch Null sein)

Weil die Bedingungen a) bis c) erfüllt sind, heißen die reellen Zahlen mit plus und mal „**Körper**“.

Ein Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen

Wir betrachten eine Menge von Elementen dieser Gestalt

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ wobei a, b, c reelle Zahlen sind, also zum Beispiel $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ und geben ihnen schon einmal den Namen Vektor.

Auf dieser Menge legen wir eine Addition fest (+). So soll man die Addition ausführen:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d \\ b+e \\ c+f \end{pmatrix} \quad \text{Beispiel: } \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ -100 \\ 0,75 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -72 \\ 99 \\ 10,25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} =$$

Außerdem soll man einen Vektor mit einer reellen Zahl ($r \in \mathbb{R}$) multiplizieren können auf folgende Weise:

$$r \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a \\ r \cdot b \\ r \cdot c \end{pmatrix} \quad \text{Beispiel: } 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 35 \\ 15 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$0,5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 68 \end{pmatrix} =$$

Es gibt also eine **Addition auf der Menge der Vektoren** und eine **Multiplikation „zwischen“ einer reellen Zahl und einem Vektor**. Die Menge der Vektoren zusammen mit dem Körper der reellen Zahlen, den Rechenarten und einigen bestimmten Gesetzen zwischen diesen Rechenarten nenne wir einen **Vektorraum V über dem Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$** .

Diese Gesetze anhand von Beispielen sind:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{die Vektoraddition ist **kommutativ**}$$

(stimmt das? Bitte nachrechnen)

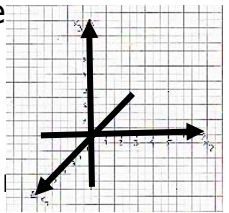
$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{stimmt das? Bitte nachrechnen})$$

$$(2 + 3) \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{stimmt das? Bitte nachrechnen})$$

$$5 \cdot \left[2 \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = (5 \cdot 2) \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{stimmt das? Bitte nachrechnen})$$

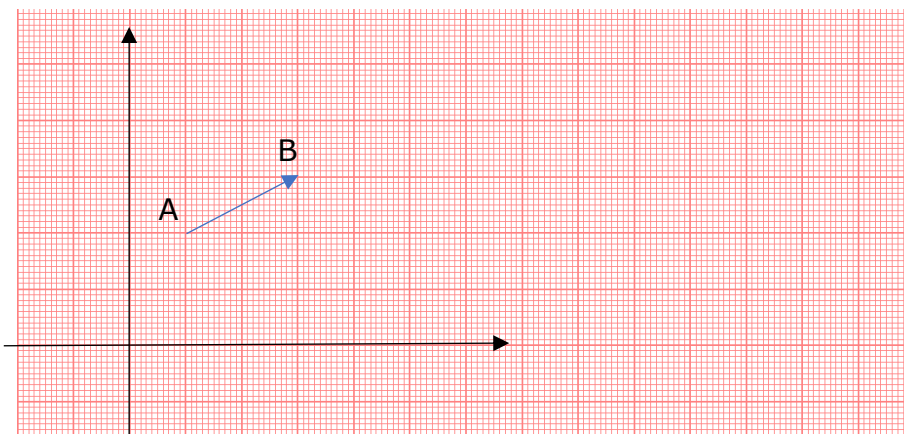
$$1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} \cdot 1 \quad (\text{stimmt das? Bitte nachrechnen})$$

Eine Besonderheit (oder andersrum vielleicht der Grund, weshalb man das so festgelegt hat) ist, dass man die so definierten Vektoren samt den Rechenarten und Rechengesetzen im Anschauungsraum veranschaulichen und als stimmig betrachten kann:

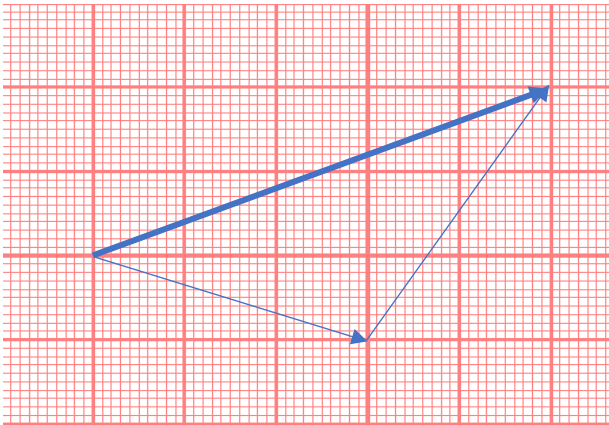


Zuerst in der zweidimensionalen Eben (später im dreidimensionalen Raum)

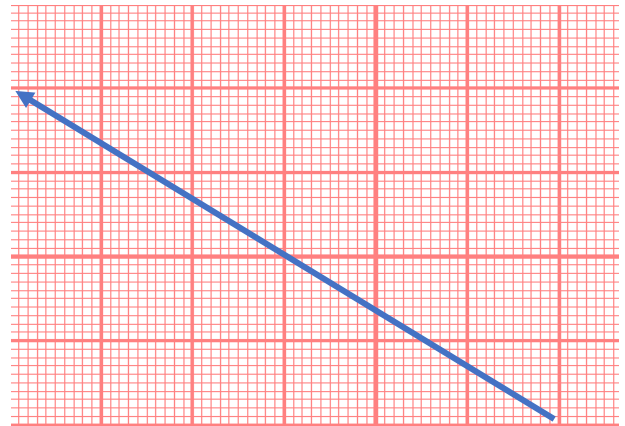
Der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Pfeil der zwischen einem Startpunkt A und einer Pfeilspitze am Endpunkt B zwei Einheiten nach rechts und d eine Einheit nach oben reicht. Zeichnen Sie noch drei weitere Repräsentanten dieses Vektors $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ in das Koordinatensystem ein.



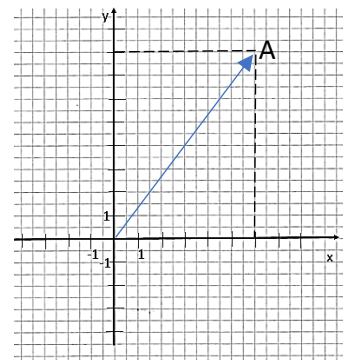
Zwei Vektoren kann man zeichnerisch addieren, indem man sie zeichnerisch aneinandersetzt: $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$



Zwei Vektoren kann man mit einer Zahl multiplizieren, indem man den Pfeil verlängert (Die Pfeillänge mit dieser Zahl multipliziert): $2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} =$



Wenn man genau wissen will, wo der Vektor im Koordinatensystem ist, benutzt man statt Pfeilklassen den Ortsvektor, der dann im Ursprung beginnt:



Eine Verknüpfung auf einer Menge ist eine Operation zwischen zwei beliebigen Elementen der Menge, sodass nach dem Durchführen der Operation wieder ein Element der Menge herauskommt. Hier im Beispiel soll die Verknüpfung „mischen“ wie beim Mischen von „Wasserfarben“ sein, wobei alles außer blau-blau; gelb-gelb, grün-grün, blau-gelb und umgekehrt als bunt gewertet werden.

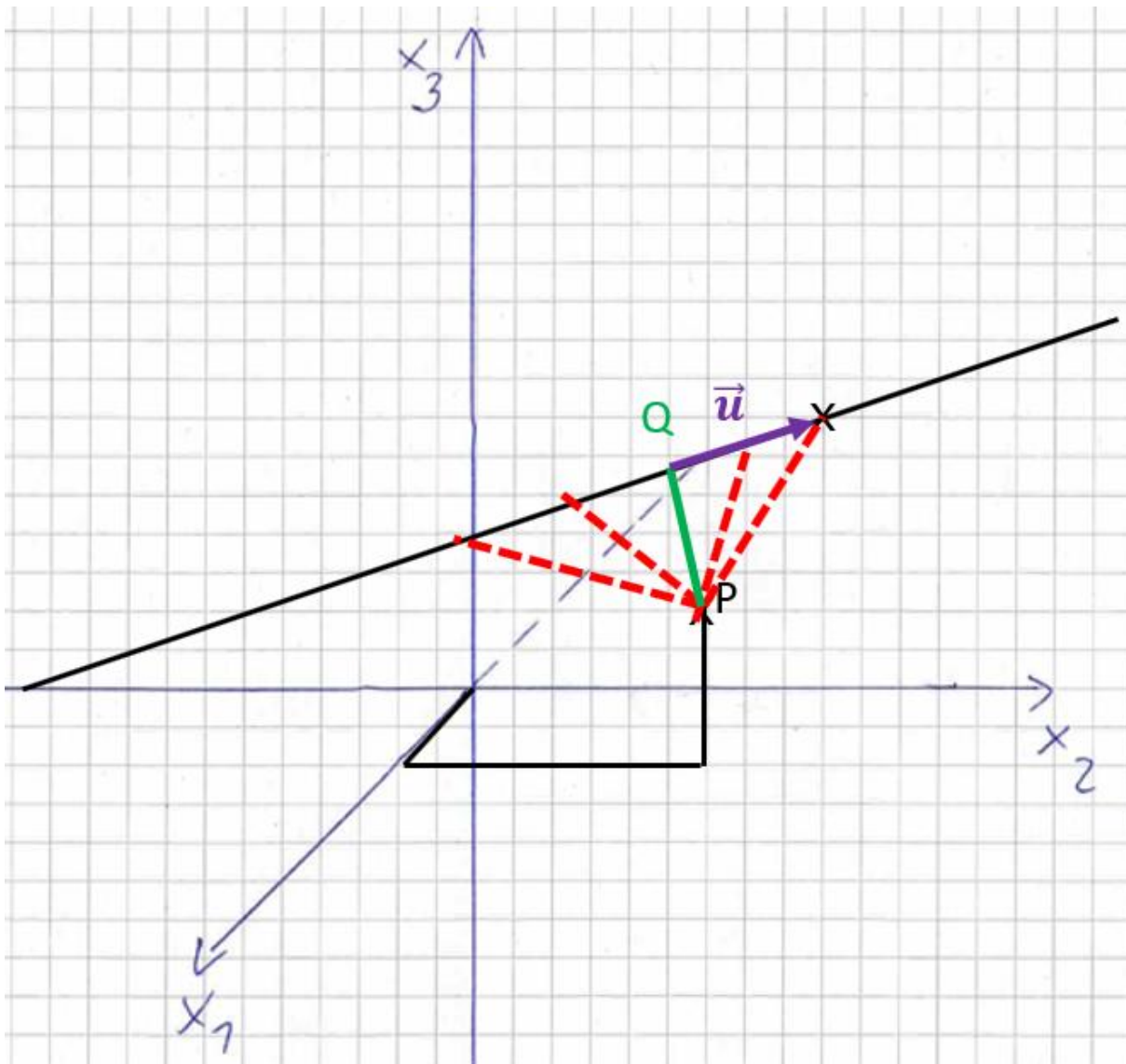
mischen					
					
					
					
					
					

1) Füllen Sie obenstehende Tabelle (Verknüpfungstafel) aus mit Worten oder Farben.

2) Addieren Sie die jeweiligen Elemente auf einem separaten Blatt und füllen sie anschließend die Tabelle aus:

Verknüpfung +	Beschreibung der Verknüpfung in Worten	Eigenschaften, die die Elemente haben könnten
$3 + 8 =$		
blau + gelb =		
$f(X) = x^3 + x^2 + 7$ $g(x) = 9x^5 + 3$		
 		
$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} =$		

Der Abstand eines Punktes P zu einer Geraden g ist die kürzeste Entfernung von P zu einem Punkt Q auf der Geraden.



Also der Punkt Q, für den gilt: $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0$ (für den das Skalarprodukt 0 ergibt).

Beispiel: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$,

also $\vec{q} = \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 1 + 0t \\ 2 + 3t \\ 3 + 1t \end{pmatrix}$ $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 + 0t - 2 \\ 2 + 3t - 4 \\ 3 + 1t - 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 + 3t \\ 1 + 1t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$0 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2 + 3t) + 1 \cdot (1 + t) = 0$$

$$-6 + 9t + 1 + t = 0$$

$$-5 + 10t = 0 \quad | +5 | :10$$

$$t = 0,5$$

$$\text{Damit ist } \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 + 0t - 2 \\ 2 + 3t - 4 \\ 3 + 1t - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 0 \cdot 0,5 - 2 \\ 2 + 3 \cdot 0,5 - 4 \\ 3 + 1 \cdot 0,5 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -0,5 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

$$\dots \text{ und } |\overrightarrow{PQ}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -0,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-1)^2 + (-0,5)^2 + 1,5^2} = \sqrt{1 + 0,25 + 2,25} = \sqrt{3,5} \approx 1,87$$

Aufgabe 1)

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{und } P(4|9|2)$$

Aufgabe 2)

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und } P(2|6|0)$$

Aufgabe 3)

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und } P(9|9|10)$$

Aufgabe 4)

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und } P(3|0|0)$$

g und h sind gleich (identisch). Welche der folgenden Aussagen sind dazu äquivalent?

☐	Jeder Punkt von h liegt auch auf g.
☐	Die Richtungsvektoren sind kein Vielfaches voneinander und die Stützvektoren sind gleich.
☐	Die Richtungsvektoren sind ein Vielfaches voneinander und der Stützvektor von h liegt nicht auf g.
☐	g und h haben zwei gemeinsame Punkte.
☐	Die Richtungsvektoren sind ein Vielfaches voneinander und der Stützvektor ist gleich.
☐	Die Richtungsvektoren sind kein Vielfaches voneinander es gibt keinen gemeinsamen Punkt.
☐	Die Richtungsvektoren sind ein Vielfaches voneinander und der Stützvektor von h liegt auf g.
☐	Die Richtungsvektoren sind kein Vielfaches voneinander und der Stützvektor von h liegt auf g.
☐	Die Richtungsvektoren sind ein Vielfaches voneinander und es gibt keinen gemeinsamen Punkt von h und g (das LGS hat keine Lösung).
☐	Die Richtungsvektoren sind ein Vielfaches voneinander und g und h haben einen gemeinsamen Punkt.
☐	Die Richtungsvektoren sind kein Vielfaches das LGS hat keine Lösung.

g und h sind parallel. Welche der folgenden Aussagen sind dazu äquivalent?

☐	Jeder Punkt von h liegt auch auf g.
☐	Die Richtungsvektoren sind kein Vielfaches voneinander und die Stützvektoren sind gleich.
☐	Die Richtungsvektoren sind ein Vielfaches voneinander und der Stützvektor von h liegt nicht auf g.
☐	g und h haben zwei gemeinsame Punkte.
☐	Die Richtungsvektoren sind ein Vielfaches voneinander und der Stützvektor ist gleich.
☐	Die Richtungsvektoren sind kein Vielfaches voneinander es gibt keinen gemeinsamen Punkt.
☐	Die Richtungsvektoren sind ein Vielfaches voneinander und der Stützvektor von h liegt auf g.
☐	Die Richtungsvektoren sind kein Vielfaches voneinander und der Stützvektor von h auf g.
☐	Die Richtungsvektoren sind ein Vielfaches voneinander und es gibt keinen gemeinsamen Punkt von h und g (das LGS hat keine Lösung).
☐	Die Richtungsvektoren sind ein Vielfaches voneinander und g und h haben einen gemeinsamen Punkt.
☐	Die Richtungsvektoren sind kein Vielfaches das LGS hat keine Lösung.

g und h schneiden sich. Welche der folgenden Aussagen sind dazu äquivalent?

☐	Jeder Punkt von h liegt auch auf g.
☐	Die Richtungsvektoren sind kein Vielfaches voneinander und die Stützvektoren sind gleich.
☐	Die Richtungsvektoren sind ein Vielfaches voneinander und der Stützvektor von h liegt nicht auf g.
☐	g und h haben zwei gemeinsame Punkte.
☐	Die Richtungsvektoren sind ein Vielfaches voneinander und der Stützvektor ist gleich.
☐	Die Richtungsvektoren sind kein Vielfaches voneinander es gibt keinen gemeinsamen Punkt.
☐	Die Richtungsvektoren sind ein Vielfaches voneinander und der Stützvektor von h liegt auf g.
☐	Die Richtungsvektoren sind kein Vielfaches voneinander und der Stützvektor von h liegt auf g.
☐	Die Richtungsvektoren sind ein Vielfaches voneinander und es gibt keinen gemeinsamen Punkt von h und g (das LGS hat keine Lösung).
☐	Die Richtungsvektoren sind ein Vielfaches voneinander und g und h haben einen gemeinsamen Punkt.
☐	Die Richtungsvektoren sind kein Vielfaches das LGS hat keine Lösung.

g und h sind windschief. Welche der folgenden Aussagen sind dazu äquivalent?

☐	Jeder Punkt von h liegt auch auf g.
☐	Die Richtungsvektoren sind kein Vielfaches voneinander und die Stützvektoren sind gleich.
☐	Die Richtungsvektoren sind ein Vielfaches voneinander und der Stützvektor von h liegt nicht auf g.
☐	g und h haben zwei gemeinsame Punkte.
☐	Die Richtungsvektoren sind ein Vielfaches voneinander und der Stützvektor ist gleich.
☐	Die Richtungsvektoren sind kein Vielfaches voneinander es gibt keinen gemeinsamen Punkt.
☐	Die Richtungsvektoren sind ein Vielfaches voneinander und der Stützvektor von h liegt auf g.
☐	Die Richtungsvektoren sind kein Vielfaches voneinander und der Stützvektor von h liegt auf g.
☐	Die Richtungsvektoren sind ein Vielfaches voneinander und es gibt keinen gemeinsamen Punkt von h und g (das LGS hat keine Lösung).
☐	Die Richtungsvektoren sind ein Vielfaches voneinander und g und h haben einen gemeinsamen Punkt.
☐	Die Richtungsvektoren sind kein Vielfaches das LGS hat keine Lösung.

Anschlussfragen:

identisch

$$1) \quad g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$3) \quad g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad r \text{ und } s \in \mathbb{R}$$

$$h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad r \text{ und } s \in \mathbb{R}$$

$$h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad r \text{ und } s \in \mathbb{R}$$

parallel

$$1) \quad g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$3) \quad g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad r \text{ und } s \in \mathbb{R}$$

$$h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad r \text{ und } s \in \mathbb{R}$$

$$h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad r \text{ und } s \in \mathbb{R}$$

schneiden sich

$$1) \quad g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$3) \quad g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad r \text{ und } s \in \mathbb{R}$$

$$h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad r \text{ und } s \in \mathbb{R}$$

$$h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad r \text{ und } s \in \mathbb{R}$$

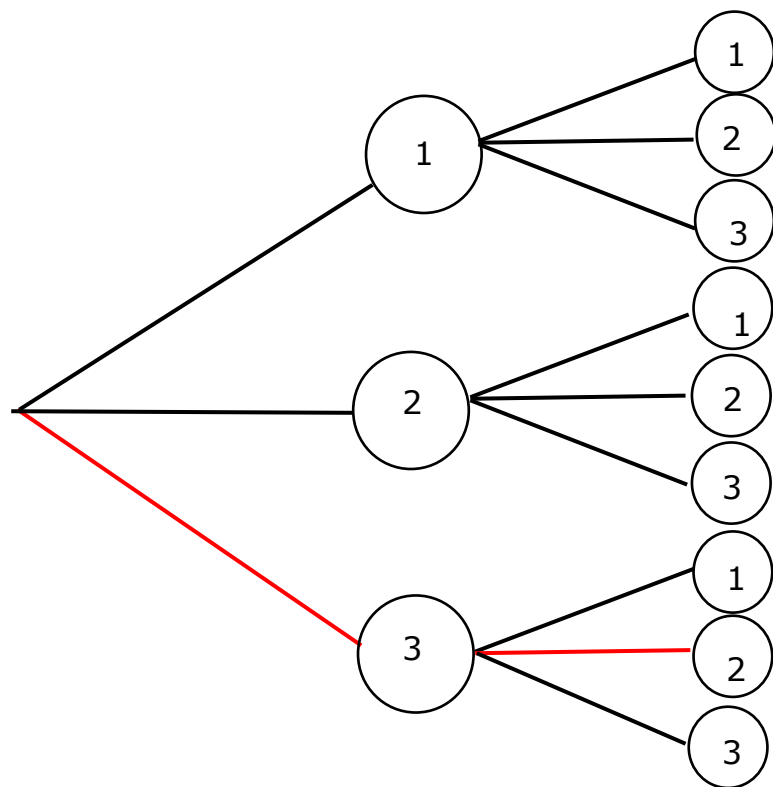
windschief

Richtungsvektoren sind kein Vielfaches voneinander.

LGS lösen zum Nachweis, dass es keinen Schnittpunkt gibt. LGS muss unlösbar sein

Ein Wahrscheinlichkeitsbaum ist folgendermaßen aufgebaut. Wenn man sich an einen Knoten „setzt“ dann gehen von ihm Äste aus, die zu Ereignissen führen. Am Ast steht die Wahrscheinlichkeit mit der (vom Knoten aus gesehen) das Ereignis eintritt. Addiert man die Wahrscheinlichkeiten aller Äste von diesem Knoten aus, so ergibt deren Summe 1.

Beispiel 1: Auf einem Laplace-Würfel steht jeweils auf einer Seite die Zahl 1, auf zwei Seiten die 2 und auf drei Seiten die 3. Es wird zweimal gewürfelt und nach jedem Wurf die geworfene Zahl notiert.



A: erster Wurf ist eine 3

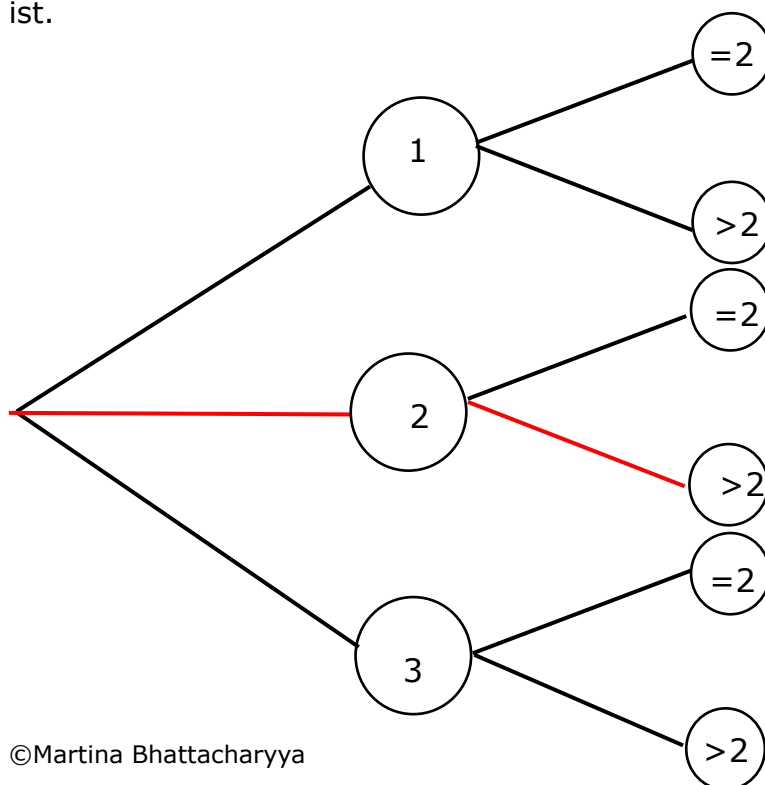
B: zweiter Wurf ist eine 2

$P(A \cap B) =$ (Pfadregel)

Schreibweise: $P_B(A)$

Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B

Beispiel 2: Auf einem Laplace-Würfel steht jeweils auf einer Seite die Zahl 1, auf zwei Seiten die 2 und auf drei Seiten die 3. Es wird **zweimal** gewürfelt. Nach dem ersten Mal wird die gewürfelte Zahl notiert, nach dem zweiten Mal wird notiert, ob die Summe der beiden Würfe $=2$ ist oder >2 ist.



A: erster Wurf ist eine 2

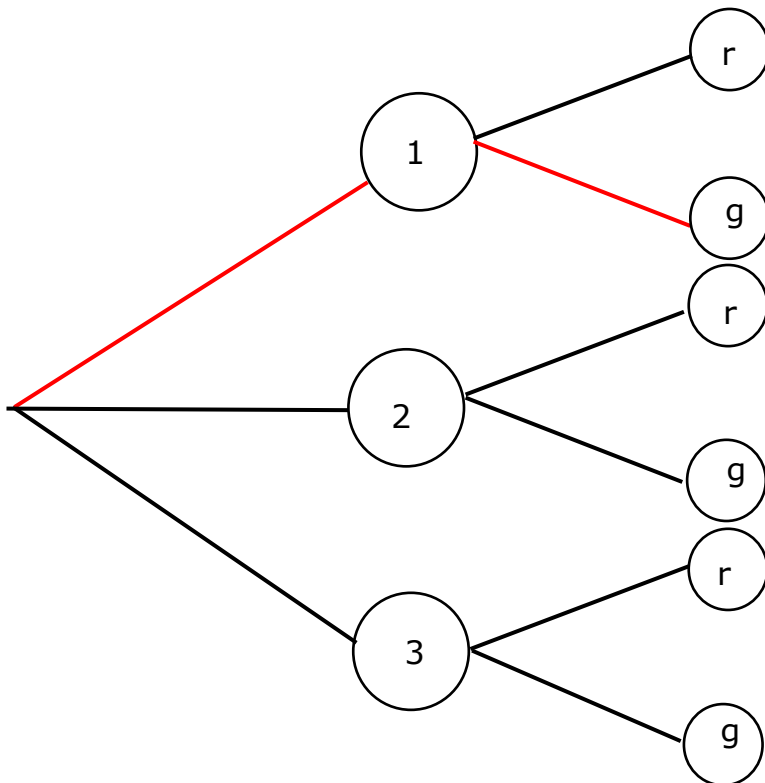
B: Summe ist größer 2

$P(A \cap B) =$ (Pfadregel)

Schreibweise: $P_B(A)$

Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B

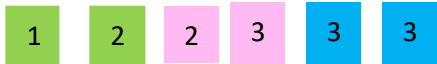
Beispiel 3: Auf einem Laplace-Würfel steht jeweils auf einer Seite die Zahl 1, auf zwei Seiten die 2 und auf drei Seiten die 3. Die Seiten mit der 1 und der 2 sind rot angemalt, die Seiten mit der 3 grün. Es wird **zweimal** gewürfelt. Nach dem ersten Mal wird die gewürfelte Zahl notiert, nach dem zweiten Mal die gewürfelte Farbe



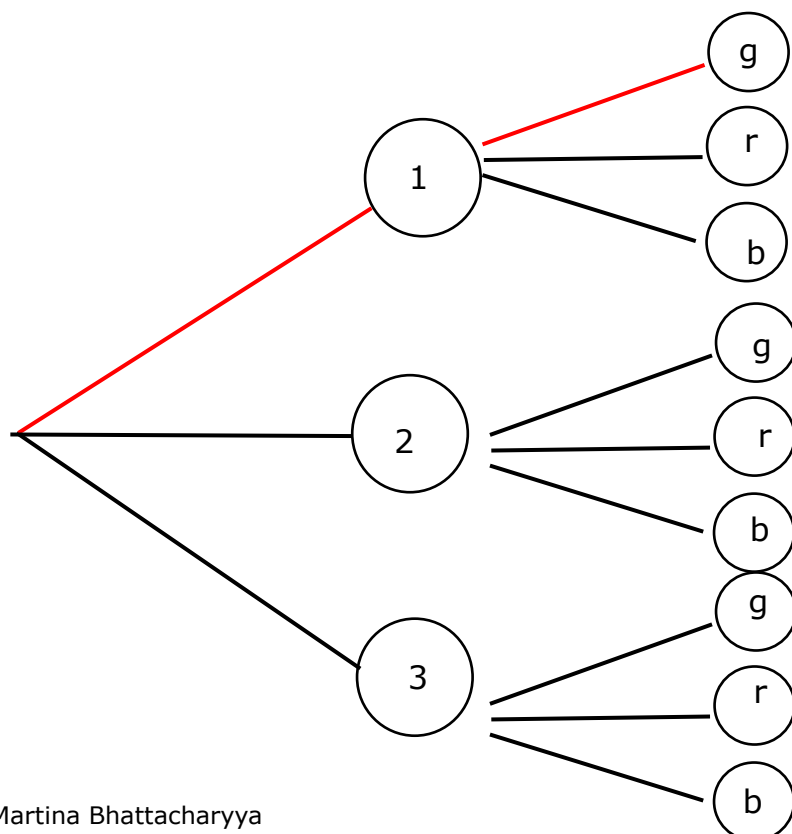
A: erster Wurf ist eine 1
 B: zweiter Wurf ist grün
 $P(A \cap B) =$ (Pfadregel)

Schreibweise: $P_B(A)$
 Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B

Beispiel 4: Auf einem Laplace-Würfel steht jeweils auf einer Seite die Zahl 1, auf zwei Seiten die 2 und auf drei Seiten die 3. Die Seiten rot und grün wie folgt angemalt: angemalt:



Es wird **einmal** gewürfelt. Nach dem ersten Mal wird erst die gewürfelte Zahl und Farbe notiert.



A: die Zahl ist eine 1
 B: die Farbe ist grün
 $P(A \cap B) =$ (Pfadregel)

Schreibweise: $P_B(A)$
 Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B

Untersuchen Sie, ob $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ für

Beispiel 1: $P(A) \cdot P(B) =$

Beispiel 2: $P(A) \cdot P(B) =$

Beispiel 3: $P(A) \cdot P(B) =$

Beispiel 4: $P(A) \cdot P(B) =$

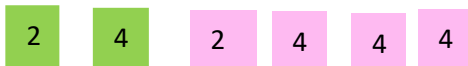
Falls $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ heißen die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig, ansonsten heißen sie stochastisch abhängig.

An Beispiel 4 sieht man, dass die Farbe abhängig ist von der gewürfelten Zahl. („Es spielt also eine Rolle auf welchem Ast man sitzt, wenn man in die Zukunft schaut“). Und der Begriff bedingte Wahrscheinlichkeit angebracht ist.

Außerdem könnte man aufgrund des „Aufbaus des Stochastischen Experiments“ **Zahl** und **Farbe** als zwei Merkmale bezeichnen.

In der Situation, dass in einem Zufallsexperiment im Ergebnis zwei Merkmale untersucht werden, benutzt man als Darstellung häufig eine **Vierfeldertafel**:

Beispiel: Auf einem Laplace-Würfel steht jeweils zwei Seiten die Zahl 2, auf vier Seiten die Zahl 4. Die Seiten rot und grün wie folgt angemalt.



Ergebnismenge:

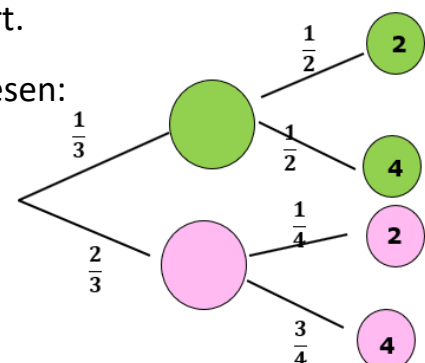
	2	4	Σ
grün			
rot			
Σ			

In die Kästchen wird die Anzahl des Merkmals eingetragen

Der Würfel wird geworfen und beide Merkmale werden notiert.

So lassen sich schnell die bedingten Wahrscheinlichkeiten ablesen:

$P_2(rot) =$



Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariablen

Unter der Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariablen versteht man die Funktion

$$f : x_i \rightarrow P(X = x_i)$$

Der Funktionswert $f(x_i) = P(X = x_i)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass X den Wert x_i annimmt.

Die zugehörige Wertetabelle nennt man Wahrscheinlichkeitsverteilung.

1) X : Anzahl der Wappen beim viermaligen Werfen einer Münze.

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$					

2) X : Minimum der Augenzahlen beim Wurf zweier Würfel

x_i						
$P(X = x_i)$						

3) X : Anzahl der Würfe mit Augenzahl 6, wenn man dreimal würfelt

x_i					
$P(X = x_i)$					

Erwartungswert einer Zufallsvariablen

Ist X eine Zufallsvariable, die die Werte $x_1, x_2, \dots, x_n$ annehmen kann, so heißt die Zahl

$$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \dots + x_n \cdot P(X = x_n)$$

Erwartungswert der Zufallsvariablen X .

Merke: Der Erwartungswert ist der zu erwartende Mittelwert von X , wobei jeder Wert x_i mit seiner Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i)$ gewichtet wird.

Aufgabe: Geben Sie für obige Zufallsvariablen den Erwartungswert an.

Varianz und Standardabweichung:

Ist X eine Zufallsvariable, die die Werte $x_1, x_2, \dots, x_n$ annehmen kann und den Erwartungswert $E(X)$ hat, dann heißt die reelle Zahl s^2 mit

$s^2 = (x_1 - E(X))^2 \cdot P(X = x_1) + \dots + (x_n - E(X))^2 \cdot P(X = x_n)$ die Varianz der Zufallsvariablen X .

Für die **Standardabweichung** s gilt: $s = \sqrt{\text{Varianz}}$

Aufgaben: Zeichnen Sie für die folgenden Zufallsvariablen jeweils ein Schaubild der Wahrscheinlichkeitsfunktion und geben Sie Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung an

- 1) X : Anzahl der Wappen beim viermaligen Werfen einer Münze.
- 2) X : Minimum der Augenzahlen beim Wurf zweier Würfel.
- 3) X : Anzahl der Würfe mit Augenzahl 6, wenn man dreimal würfelt.

In einer Urne liegen 3 weiße und 2 schwarze Kugeln. Es werden nacheinander drei Kugeln **mit Zurücklegen** gezogen. Eine weiße Kugel bedeutet 1€ Gewinn, eine schwarze 0 €. Die Zufallsvariable X gibt den möglichen Auszahlungsbetrag an.

Geben Sie die Verteilung(-sfunktion) von X an.

	keine weiße	eine weiße, zwei schwarze	zwei weiße, eine schwarze	drei weiße	
x_i	0	1	2	3	allgemein
$P(X = x_i)$	$\binom{3}{0} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3$	$\binom{3}{1} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2$	$\binom{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^1$	$\binom{3}{3} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^0$	$\binom{3}{k} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{3-k}$

Anzahl der „günstigen“ (Äste)

Die Wahrscheinlichkeit im grünen Kästchen ist eine „komplizierte“ Schreibweise für $\left(\frac{2}{5}\right)^3$

Sie zeigt aber die Struktur der Formel, die sich für die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten ergibt. („Funktionsgleichung“)

Zeichnen Sie hier einen passenden Wahrscheinlichkeitsbaum

Problemstellung bei den Textaufgaben der Binomialverteilung

Bei der Binomialverteilung hat die Zufallsgröße X (hier $B_{n,p}$) die „Funktionsgleichung“ (Wahrscheinlichkeitsverteilungsformel)

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Dabei ist n die Anzahl der Durchführungen des Bernoulli-Experiments, p die Trefferwahrscheinlichkeit und k die Anzahl der Treffer, die im Aufgabentext vorgegeben ist und zu der wir die Wahrscheinlichkeit suchen.

Diese Formel lässt sich nicht so einfach nach n oder k auflösen wie zum Beispiel die Funktionsgleichung $y=(bx-a)^2$ sich nach a auflösen lässt.

Je nach Textaufgabe kann der Parameter n oder k oder eben $P(X=k)$ oder $P(X \leq k)$ gefragt sein.

Wir formulieren gedanklich jede Textaufgabe so um dass es sich um Treffer oder nicht Treffer handelt, wobei das Experiment n mal durchgeführt wird.